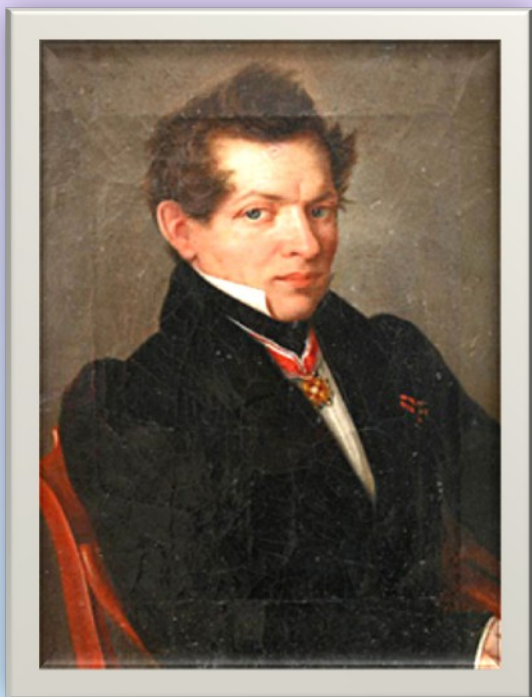
The background features a collage of mathematical and scientific symbols and shapes. At the top, there is a blue '7' with a superscript '2', a black trident-like symbol, and a red circle. Below these, a green dome-like shape and a yellow cross-like shape are visible. In the bottom left, there is a 3D yellow cube and a red circular object with concentric rings. The main title is centered in a yellow box.

Решение физических задач методами математического анализа

Мастер-класс.
Преподаватель физики
ФГКОУ «Московское
суворовское военное
училище МО РФ» Васина
Ольга Владиславовна.

***«...нет ни одной области в математике,
которая когда-либо не окажется
применимой к явлениям
действительного мира...»***

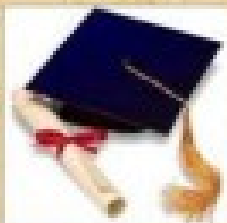
***Н.И. Лобачевский -
великий русский геометр, творец
неевклидовой геометрии***



- *Цель мастер-класса*– показать применение методов математического анализа к решению физических задач разного уровня сложности.

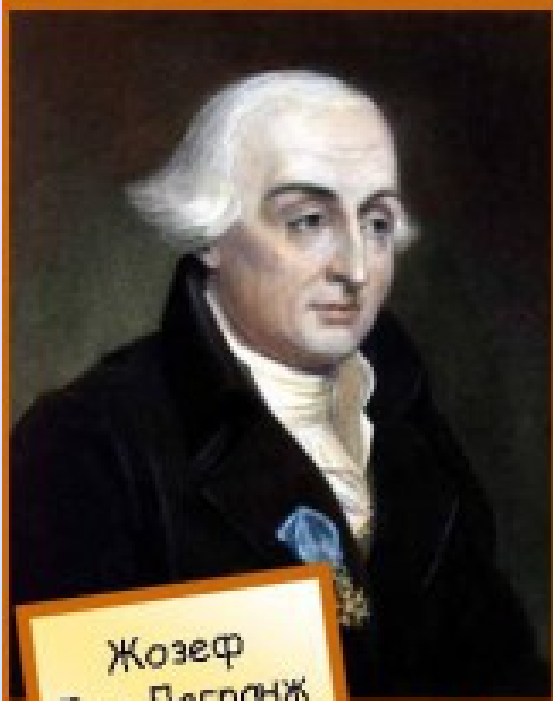


- «Задача – это необходимость сознательного поиска соответствующего средства для достижения некоторой цели» Д. Пойа ,венгерский, швейцарский и американский математик.

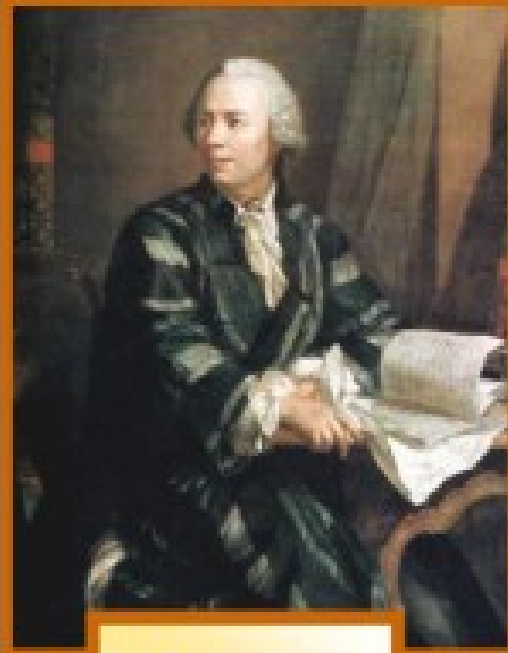


Как родилась производная

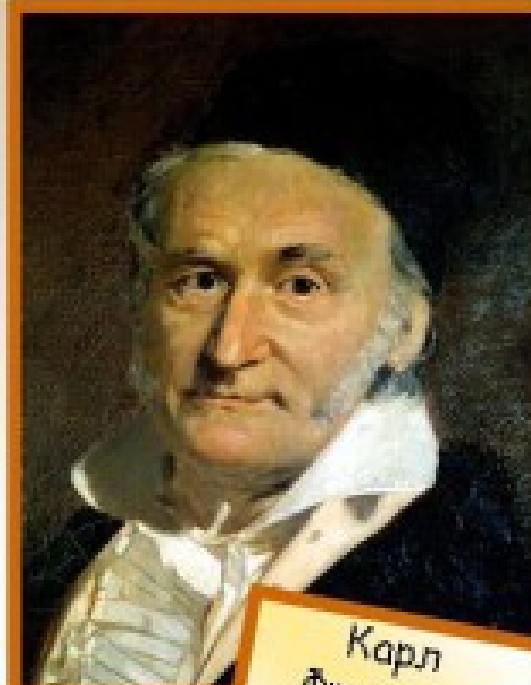
- Очень многие великие ученые внесли свой вклад
- в зарождение и развитие дифференциального исчисления



Жозеф
Луи Лагранж
(1736-1813)



Леонард
Эйлер
(1707-1783)



Карл
Фридрих
Гаусс
(1777-1855)

Исторические сведения

Производная – одно из фундаментальных понятий математики. Оно возникло в 18 веке.

Независимо друг от друга И.Ньютон и Г. Лейбниц разработали теорию дифференциального исчисления.



О происхождении терминов и обозначений производной и предела

Термин «производная» - буквально перевод французского слова *derivee*.

1797г – Ж.Лагранж ввел современные обозначения производной .
И.Ньютон называл производную *флюксией*, а саму функцию – *флюентой*.

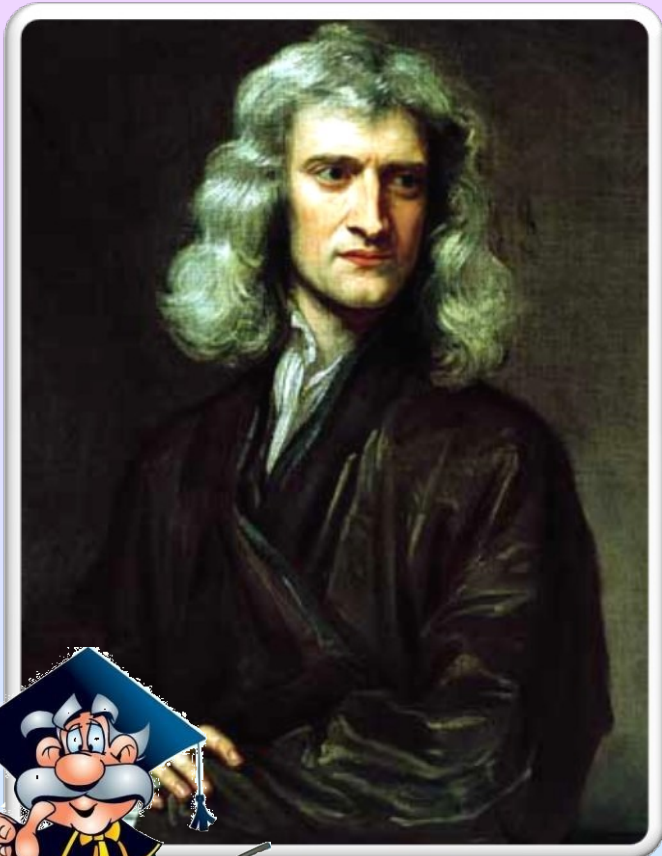
Г.Лейбниц говорил о дифференциальном отношении и обозначал производную как

$$\begin{array}{l} y' \quad \text{или} \quad y'_x, \\ f'_x \quad \text{или} \quad f'_x(x), \\ \frac{dy}{dx} \quad \text{или} \quad \frac{df}{dx}. \end{array}$$

Термин «предел» (*lim* – сокращение латинского слова *limes* (межа, граница)) ввел И.Ньютон.



Исаак Ньютон (1643-1727) —
английский математик,
механик, астроном и физик,
создатель классической
механики ,
дифференциального
исчисления



Был этот мир глубокой тьмой
окутан.

Да будет свет!

И вот явился Ньютон.

Английский поэт А.Поуп.

Его труд - «Математические
начала натуральной
философии» оказал
колоссальное влияние на развитие
естествознания, стал поворотным
пунктом в истории естествознания.
Ньютон ввёл понятие
производной, изучая законы
механики, тем самым раскрыл её
механический смысл.

**Готфрид Вильгельм
Лейбниц (1646-1716)
— немецкий
философ, математик,
физик, языковед.**



**«Предупреждаю, чтобы
остерегались отбрасывать dx , -
ошибка, которую часто допускают
и которая препятствует
продвижению вперёд».**

Г.В.Лейбниц.

(1646-1716)

**Создатель Берлинской академии наук.
Основоположник дифференциального
исчисления, ввёл большую часть
современной символики
математического анализа.**

**Лейбниц пришёл к понятию
производной, решая задачу проведения
касательной к произвольной линии,
объяснив этим ее геометрический смысл.**



АРХИМЕД Archimedes

ок. 287 - 212 до н.э.

**Греческий механик,
физик, математик, инженер**



... Задолго до этого Архимед не только решил задачу на построение касательной к такой сложной кривой, как спираль, применяя при этом предельные переходы, но и сумел найти максимум функции.



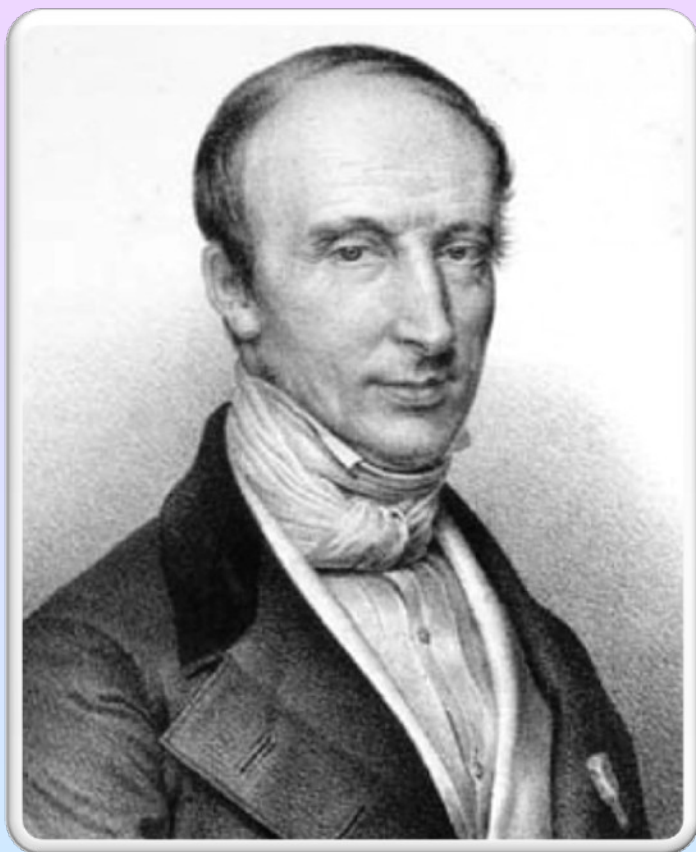
В 17в. на основе учения **Г.Галилея** активно развивалась кинематическая концепция производной. Понятие производной встречается уже у **Р.Декарта**, французского математика **Роберваля**, английского учёного **Д.Грегори**, в работах **И.Барроу**.

Большой вклад в изучение дифференциального исчисления внесли **Лопиталь**, **Бернулли**, **Лагранж**, **Эйлер**, **Гаусс**, **Коши**.

Необходимо сказать, что ни Ньютон, ни Лагранж не дали четкого определения производной.



КОШИ ОГЮСТЕН ЛУИ
(Cauchy, Augustin-Louis)
(1789–1857),
французский математик.



Впервые определение производной было сформулировано **Коши**, и именно это определение стало общепринятым и в настоящее время используется почти во всех курсах анализа.

Производная функции

Производная функции - основное понятие дифференциального исчисления, характеризующее скорость изменения функции.

Определяется как предел отношения приращения функции к приращению ее аргумента при стремлении приращения аргумента к нулю, если таковой предел существует.

Функцию, имеющую конечную производную, называют **дифференцируемой**.

Процесс вычисления производной называется **дифференцированием**.



Пусть $y = f(x)$ есть непрерывная функция аргумента x , определенная в промежутке $(a; b)$, и пусть x_0 - произвольная точка этого промежутка

Дадим аргументу x приращение Δx , тогда функция $y = f(x)$ получит приращение $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

Предел, к которому стремится отношение $\Delta y / \Delta x$ при $\Delta x \rightarrow 0$, называется производной от функции $f(x)$.

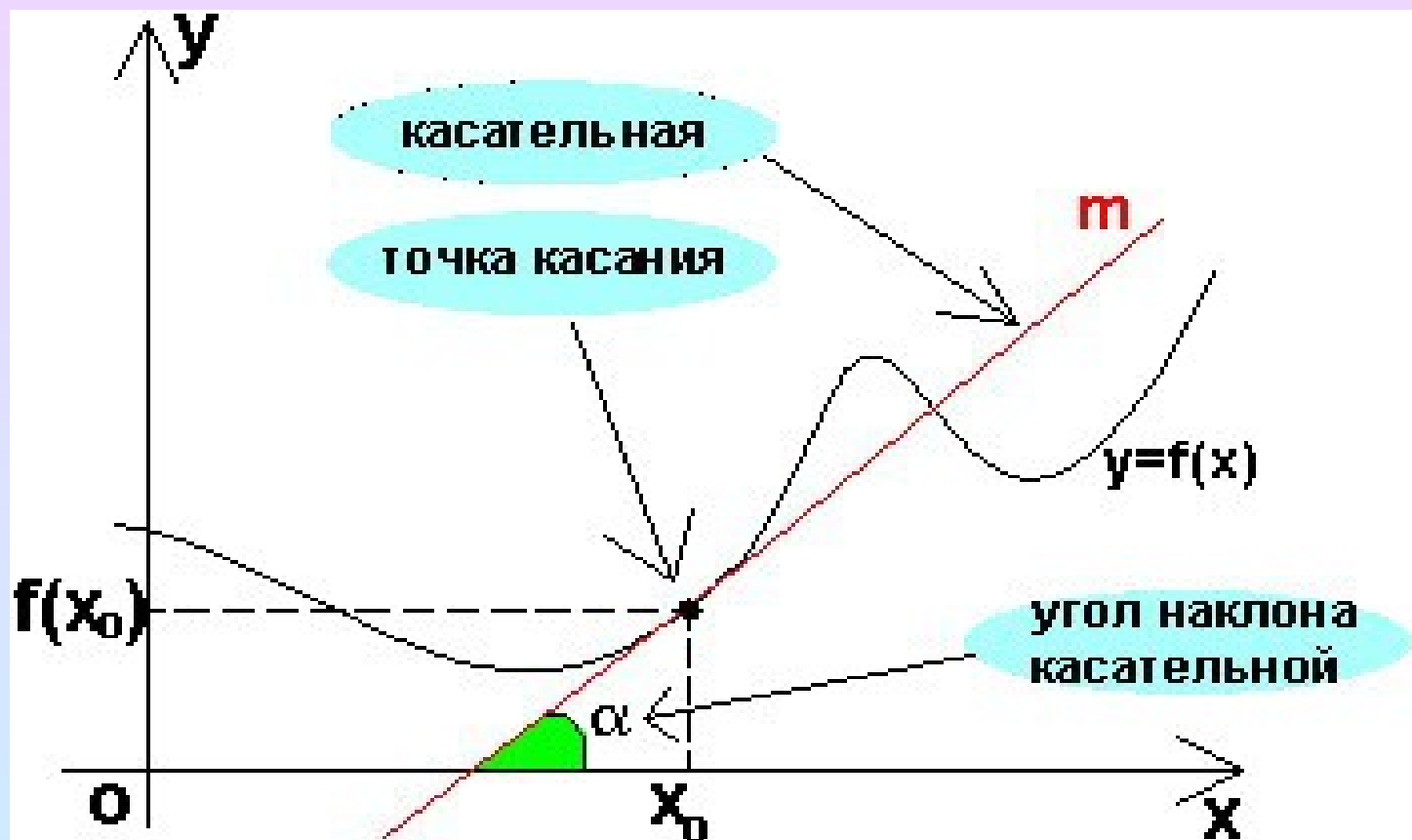


Производная

Производной функции $y = f(x)$ называется предел отношения приращения функции к приращению её аргумента, при стремлении последнего к нулю.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Геометрический смысл производной



В геометрическом контексте, производная функции может быть интерпретирована как угловой коэффициент графика функции или, выражаясь более точно, угловой коэффициент касательной линии в определенной точке. Фактически же, производная представляет собой вычисления, полученные из формулы тангенса угла наклона для прямой линии. В качестве особенности можно назвать тот факт, что переход к пределу может быть осуществим только по отношению к кривой.

Определите по графику функции $y = f(x)$:

1. Чему равен угловой коэффициент касательной в точке M?

-1

0

3/4

2. Чему равна производная в точке M?

-1

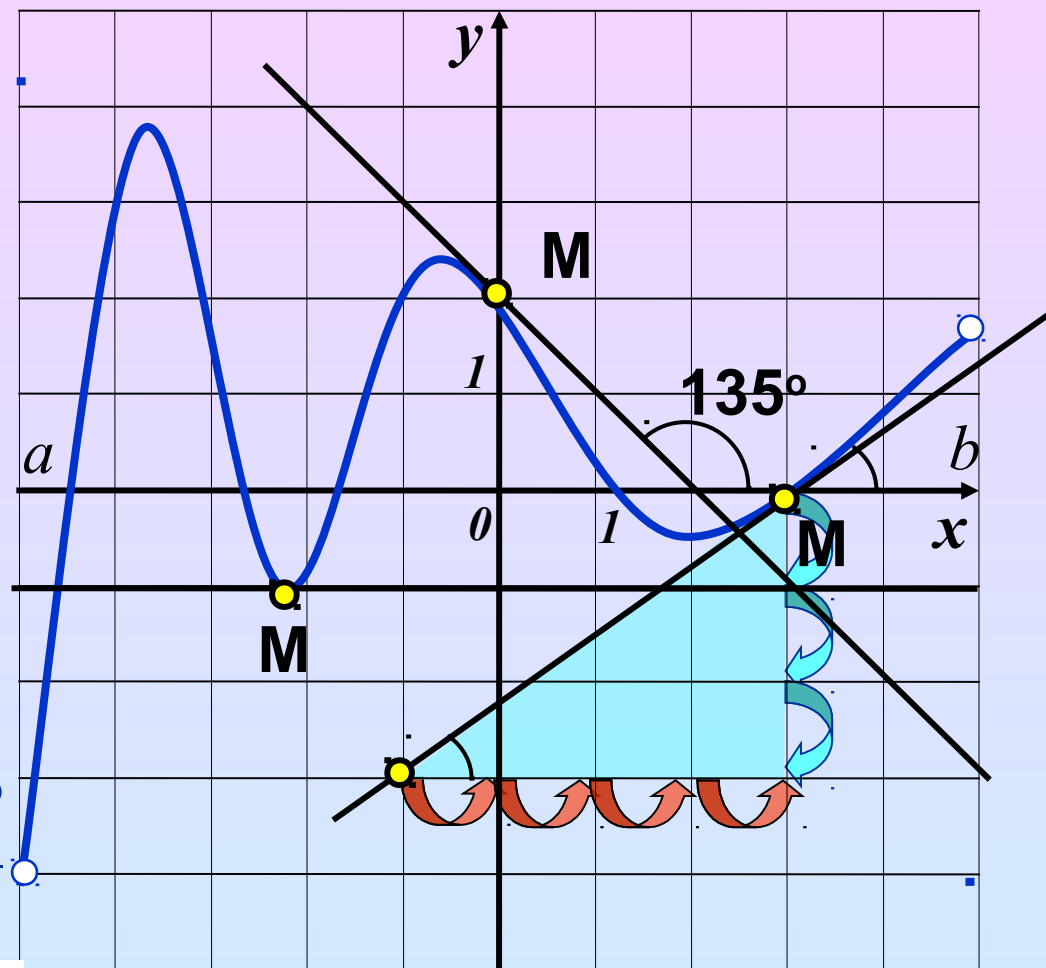
0

3/4



подсказка

$$f'(x_0) = k = \operatorname{tg} a$$



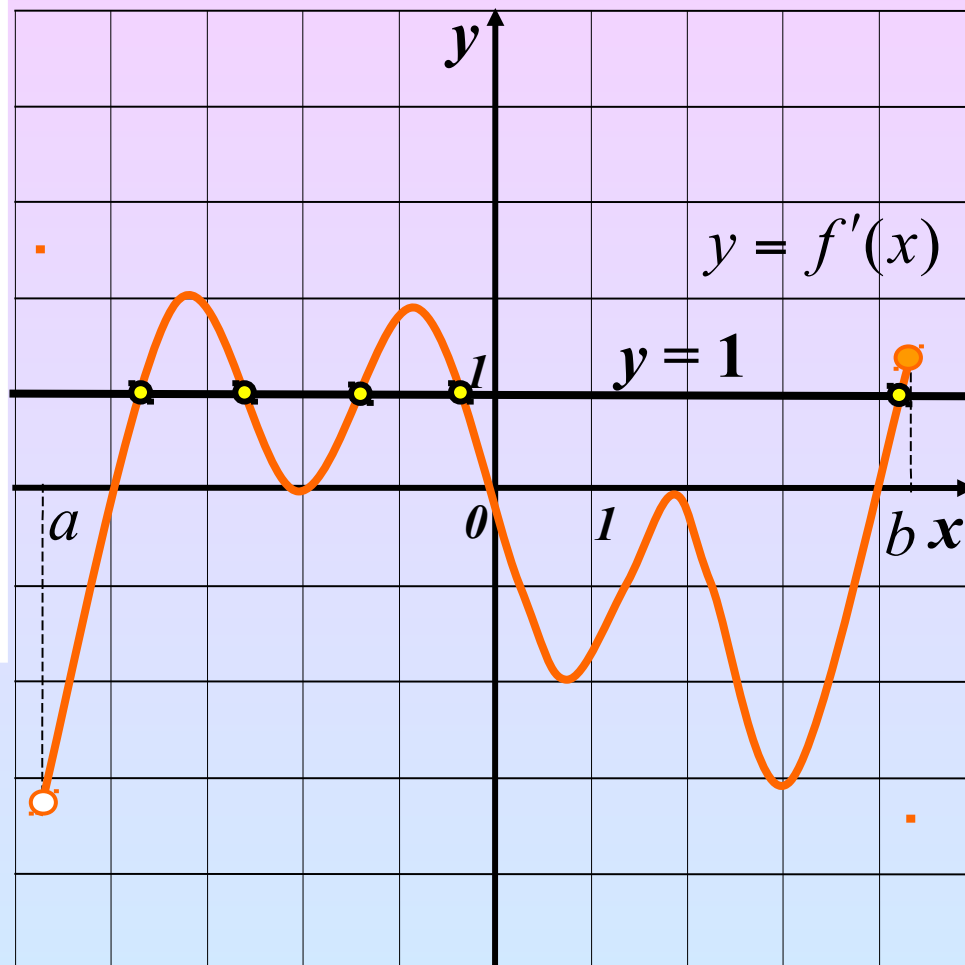
Функция $y=f(x)$ задана на интервале $(a;b)$,
на рисунке изображен график ее производной.

У всех прямых, параллельных
прямой $y = 3 + x$, угловой
коэффициент равен 1.

$$k = f'(x_0)$$

Поэтому найдём, сколько раз
производная принимает
значение, равное 1.

Для этого найдём число
точек пересечения графика
производной с прямой $y = 1$
Таких точек ровно 5.



решение

Ответ: 5

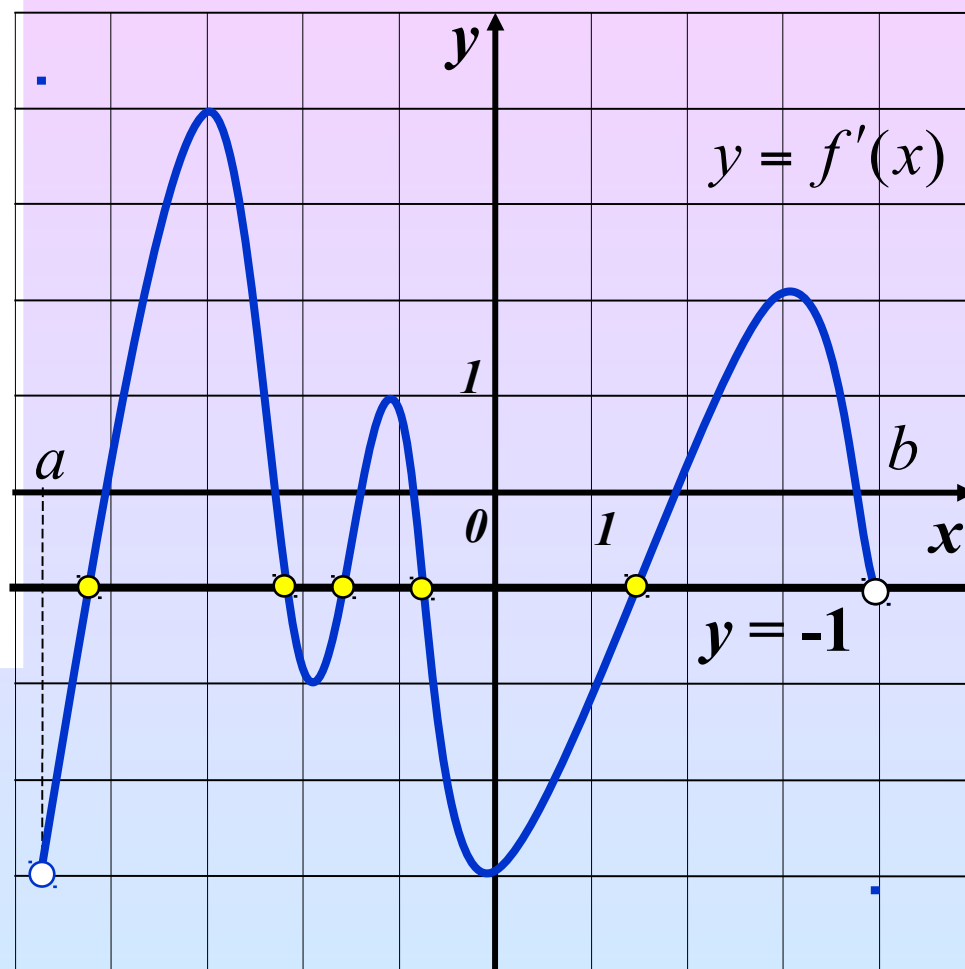
Функция $y=f(x)$ задана на интервале $(a;b)$,
на рисунке изображен график ее производной.

Найдем угловой
коэффициент $k = \operatorname{tg} \alpha$:
 $\operatorname{tg} 135^\circ = -1$. Найдём, сколько
раз производная принимает
значение, равное -1.
Для этого найдём число
точек пересечения
графика производной с
прямой $y = -1$
Таких точек ровно 5.



решение

Ответ: 5



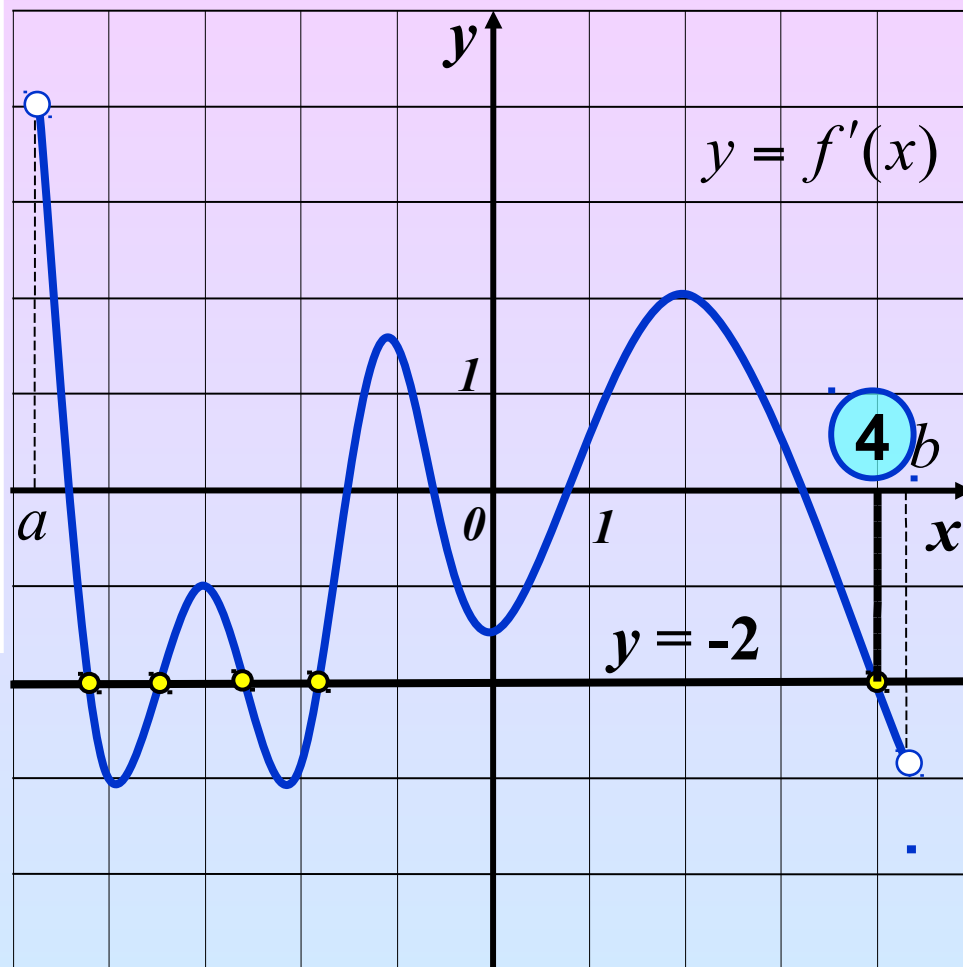
**Функция $y=f(x)$ задана на интервале $(a;b)$,
на рисунке изображен график ее производной.**

У всех прямых, параллельных
прямой $y = 4 - 2x$, угловой
коэффициент равен **-2**.
Найдём, в каких абсциссах
производная принимает
значение, равное -2.
Для этого **найдем точки**
пересечения графика
производной с прямой $y = -2$
и выберем точку с наибольшей
абсциссой. Это $x=4$.



решение

Ответ: 4



Правила дифференцирования и таблица производных

№	Функция	Производная	№	Функция	Производная
1	x^n	nx^{n-1}	8	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
2	e^x	e^x	9	$\log_a x$	$\frac{1}{x \cdot \ln a}$
3	a^x	$a^x \ln a$	10	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
4	$\sin x$	$\cos x$	11	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
5	$\cos x$	$-\sin x$	12	$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
6	$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	13	$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$
7	$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$			

Правила дифференцирования и таблица производных сложных функций

№	Функция	Производная	№	Функция	Производная
1	u^n	$nu^{n-1} \cdot u'$	8	$\ln u$	$\frac{u'}{u}$
2	e^u	$e^u \cdot u'$	9	$\log_a u$	$\frac{u'}{u \ln a}$
3	a^u	$a^u \cdot \ln a \cdot u'$	10	$\arcsin u$	$\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
4	$\sin u$	$\cos u \cdot u'$	11	$\arccos u$	$-\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
5	$\cos u$	$-\sin u \cdot u'$	12	$\operatorname{arctg} u$	$\frac{u'}{1+u^2}$
6	$\operatorname{tg} u$	$\frac{u'}{\cos^2 u}$	13	$\operatorname{arcctg} u$	$-\frac{u'}{1+u^2}$
7	$\operatorname{ctg} u$	$-\frac{u'}{\sin^2 u}$			

примеры применения производной в физических задачах.



Физический смысл производной — скорость изменения величины или процесса

Физический смысл производной

Мгновенная скорость в момент времени t_0 прямолинейного движения, совершаемого по закону $x = f(t)$, равна значению производной функции f при $t = t_0$.

$$v = f'(t)$$

Таким же образом определяют мгновенную скорость других физических процессов: углового вращения, радиоактивность распада и т. д.

Механическое движение– это изменение положения тела в пространстве относительно других тел с течением времени.

Основной характеристикой механического движения служит скорость.

Алгоритм нахождения скорости тела с помощью производной.



Если закон движения тела задан уравнением $s = s(t)$, то для нахождения мгновенной скорости тела в какой-нибудь определенный момент времени надо:

1. Найти производную $s' = f'(t)$.
2. Подставить в полученную формулу заданное значение времени.

Пример. Кинематическое уравнение движения материальной точки по прямой (ось x) имеет вид,
 $x=A+Bt+Ct^2$, где $A=5$ м, $B=4$ м/с, $C=-1$ м/с² Определить скорость тела через одну секунду после начала движения.

Пример:

Зависимость пути от времени задается уравнением

$s = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$ ($C = 0,1 \text{ м/с}$, $D = 0,03 \text{ м/с}^2$). Определить время после начала движения, через которое ускорение тела будет равно 2 м/с^2 .



Пример: Зависимость пройденного телом пути от времени задается уравнением $s = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$ ($C = 0,1 \text{ м/с}$, $D = 0,03 \text{ м/с}^2$).
Определить время после начала движения, через которое ускорение тела будет равно 2 м/с^2 .

Решение:

$$v(t) = s'(t) = B + 2Ct + 3Dt^2;$$

$$a(t) = v'(t) = 2C + 6Dt = 0,2 +$$

$$0,18t = 2;$$

$$1,8 = 0,18t; \quad t = 10 \text{ с}$$



ЗАДАЧА

Две материальные точки движутся прямолинейно по законам $s_1(t) = 1 - 6t + 2,5t^2$ и $s_2(t) = -3 + 2t + 0,5t^2$.

Определить в какой момент времени скорости их будут равны.

РЕШЕНИЕ.

$$v(t) = S'(t)$$

подсказка



1) $v_1(t) = -6 + 5t$ (формула скорости движения 1 тела)

2) $v_2(t) = 2 + t$ (формула скорости движения 2 тела)

3) по условию в момент времени t_0 скорости равны т.е. $5t_0 - 6 = 2 + t_0$

$5t_0 - 6 = 2 + t_0$

$t_0 =$

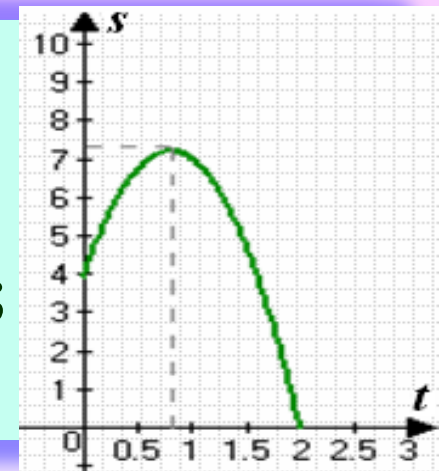
Ответ: при $t = 2$ с

ЗАДАЧА

Тело, брошенное вверх движется по закону

$$s(t) = 4 + 8t - 5t^2. \text{ Найдите:}$$

- 1) Скорость тела в начальный момент времени;
- 2) Наибольшую высоту подъёма тела.



РЕШЕНИЕ.

$$v(t) = S'(t)$$

подсказка

- 1) $v(t) = s'(t) = 8 - 10t$ - скорость тела;
- 2) $t = 0, v(0) = s'(0) = 8 \text{ м/с}$ - скорость тела в начальный момент времени
- 3) $s(0,8) = 4 + 8 \cdot 0,8 - 5 \cdot 0,64 = 7,2 \text{ м}$ - максимальная высота броска тела.

Ответ: 8 м/с ; 7,2 м .



Задача. Автомобиль приближается к мосту со скоростью 72 км/ч. У моста висит дорожный знак «30 км/ч». За 7 сек до въезда на мост, водитель нажал на тормозную педаль. С разрешаемой ли скоростью автомобиль въехал на мост, если тормозной путь определяется формулой $S = 20t - t^2$



ОТВЕТ

Да, т.к. скорость через 7 сек будет равна 6м/с (21,6 км/ч).



Физический смысл производной — скорость изменения величины или процесса

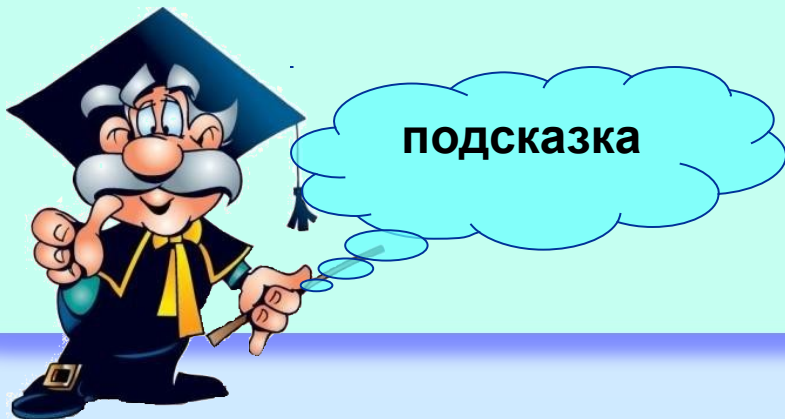
- ❖ Сила есть производная работы по перемещению, т.е. $F = A'(x)$
- ❖ Теплоемкость – есть производная количества теплоты по температуре, т.е. $C(t) = Q'(t)$
- ❖ $\omega(t) = \varphi'(t)$ - *угловая скорость*
- ❖ $\epsilon(t) = \omega'(t)$ - *угловое ускорение*
- ❖ $N(t) = A'(t)$ - *мощность*



Задача Маховик вращается вокруг оси по закону $\gamma(t) = t^4 - 1$.

Найдите его угловую скорость ω в момент времени t и $t=2$ с.

Ответ: 32 Рад/сек.



Задача.

Закон изменения температуры тела в зависимости от времени задаётся уравнением $T = 0,2t^2$. С какой скоростью изменяется температура тела в момент времени 5с ?



Задача .

Известно, что тело массой 5 кг движется прямолинейно по закону $s(t) = t^2 + 2$. Найдите кинетическую энергию, силу действующую на материальную точку и импульс тела через 2 с после начала движения.

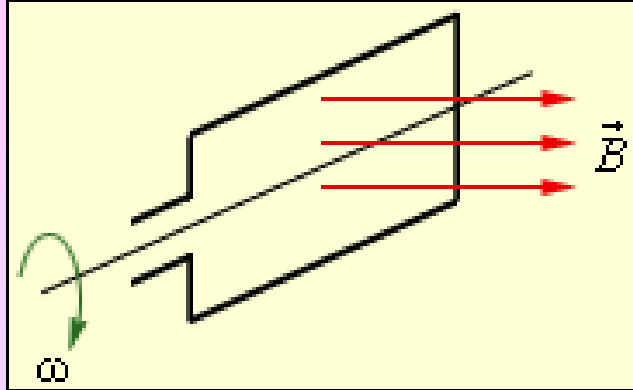
Ответ: 20 кг/м/сек; 40 Дж; 10 Н



подсказка

Задача

Определить скорость и ускорение, кинетическую и потенциальную энергию колеблющегося тела в момент **$t = 2$ с**, если координата изменяется по закону **$x(t) = 2 \sin 2\pi t$** (**x** выражена в метрах, **t** – в секундах).



Задача.

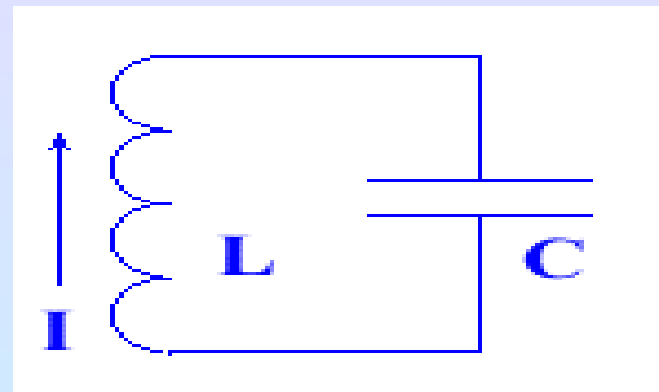
При вращении проволоочной рамки в однородном магнитном поле пронизывающий рамку магнитный поток изменяется в зависимости от времени по закону $\Phi = 10^{-2} \cos 10 t$. Вычислив производную Φ_t , написать формулу зависимости ЭДС от времени (t).

Задача

Заряд q на пластинах конденсатора изменяется по закону

$$q = 10^{-6} \cos 10^4 t.$$

Записать закон зависимости силы тока от времени $i = i(t)$, вычислив производную q'_t .



задача

Источник тока с электродвижущей силой 220 В и внутренним сопротивлением 50 Ом подключен к прибору сопротивлением R . Чему должно быть равно сопротивление R потребителя, чтобы потребляемая мощность была наибольшей? *Решение.*

подсказка



Применяем правило дифференцированной дроби и получаем $R = r = 50 \text{ Ом}$.

**применения производной для
отыскания наибольшего и
наименьшего значений непрерывной
функции на отрезке.**





Функция $y = f(x)$ задана на интервале $(a; b)$,
на рисунке изображен график ее производной.

1. Укажите промежутки
убывания функции.

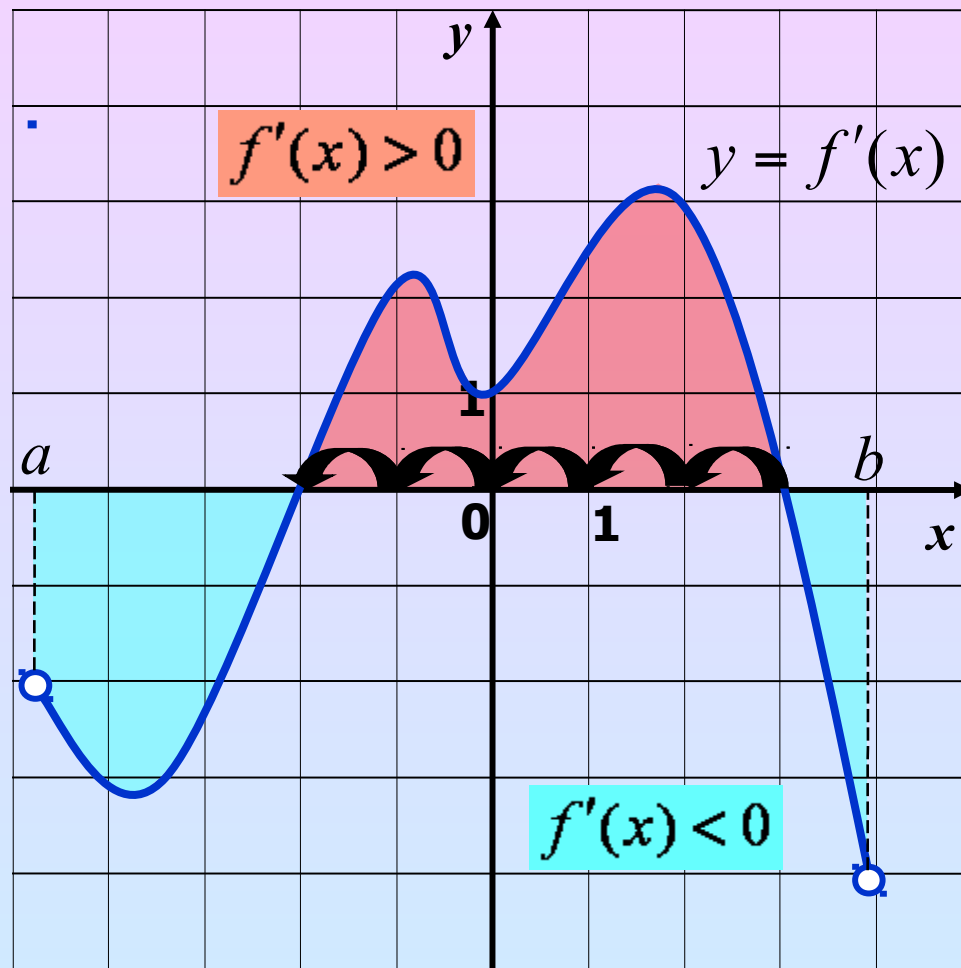
$$(a; -2], [3; b)$$

2. Укажите промежутки
возрастания функции.

$$[-2; 3]$$

3. Определите длину
промежутка возрастания
функции.

5





Функция $y = f(x)$ задана на интервале $(a; b)$,
на рисунке изображен график ее производной.

1. Укажите промежутки
убывания функции.

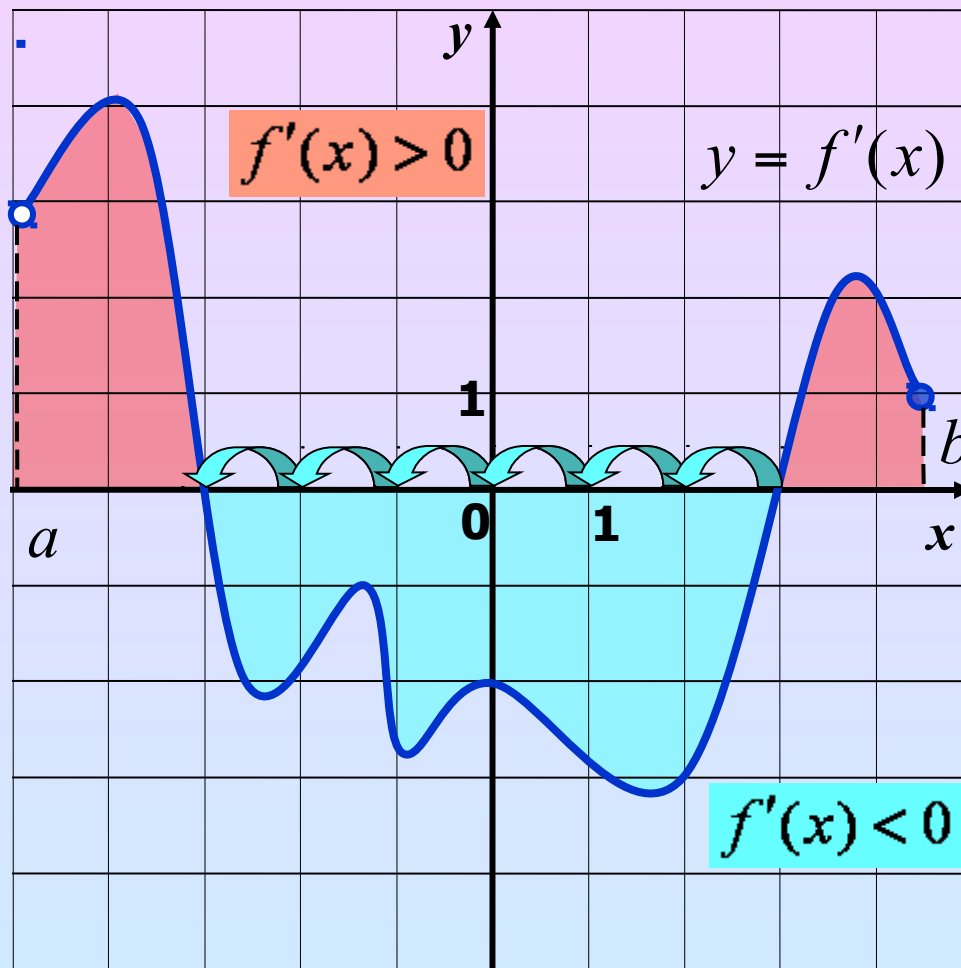
$$[-3; 3]$$

2. Укажите промежутки
возрастания функции.

$$(a; -3], [3; b]$$

3. Определите длину
промежутка, на котором
касательная к графику
функции имеет
отрицательный угловой
коэффициент?

6





Функция $y = f(x)$ задана на интервале $(a;b)$, на рисунке изображен график ее производной.

1. Укажите промежутки убывания функции.

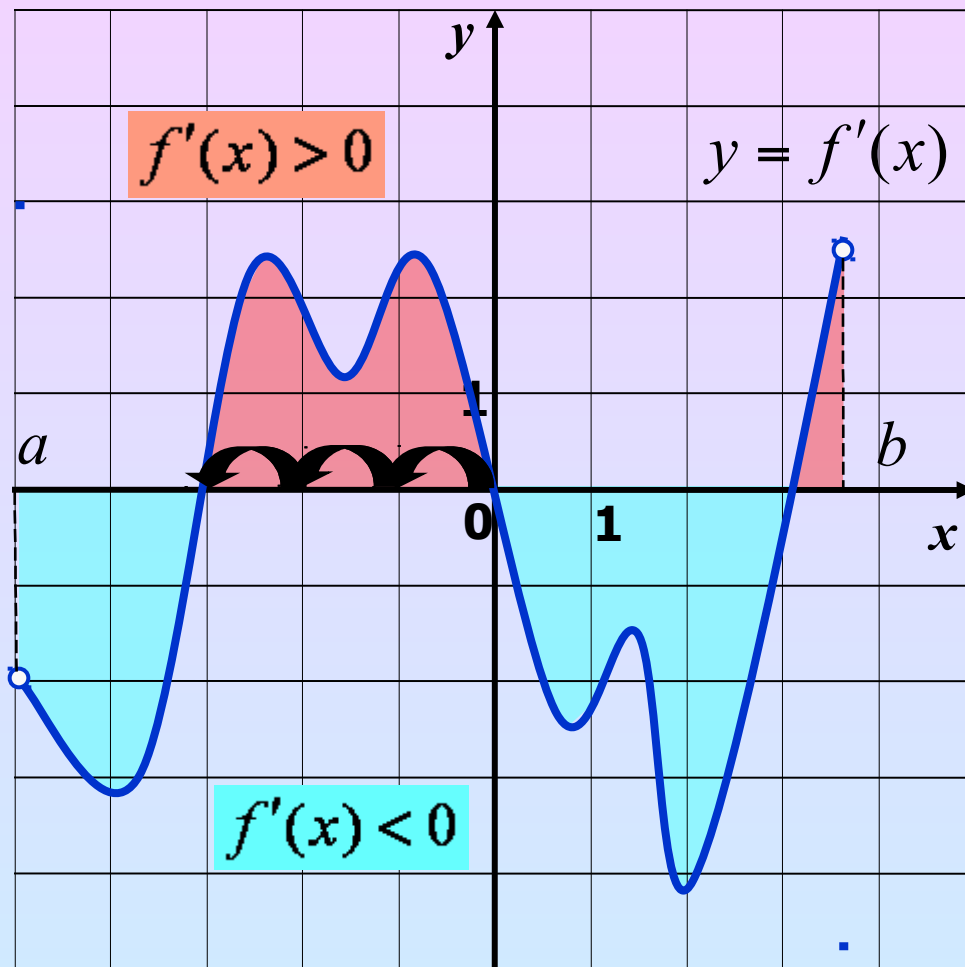
$$(a; -3], [0; 3]$$

2. Укажите промежутки возрастания функции.

$$[-3; 0], [3; b)$$

3. Определите длину наибольшего промежутка, на котором касательная к графику функции имеет положительный угловой коэффициент?

3



Алгоритм решения задач на нахождение наибольшего и наименьшего значения функций.

Найти наибольшее значение функции $y=f(x)$
на отрезке $[a,b]$.

1. Найти производную данной функции.
2. Найти критические точки.
3. Выбрать критические точки,
принадлежащие заданному отрезку.
4. Найти значение функции в отобранных
критических точках и концах отрезка.
5. Выбрать наибольшее значение функции.

Составить план решения следующей задачи

Задача. Материальная точка движется прямолинейно по закону :
 $x(t)=18t^2 - t^3$ (x- в метрах, t- в секундах). Определите, в какой момент времени из промежутка [4;8] скорость точки будет наибольшей и найдите в это время ускорение.

План решения

Реализация плана

1. Отыскать функцию, задающую скорость $y = V(t)$.
 2. Найти производную функции $V(t)$.
 3. Указать критические точки.
 4. Выбрать точки, принадлежащие отрезку $[4, 8]$.
 5. Найти значение функции $V(t)$ при $x=4$, $x=6$, $x=8$.
 6. Записать ответ, выбрав наибольшее из найденных значений.
1. $V(t) = x'(t)$, $V(t) = 36t - 3t^2$
 2. $V'(t) = 36 - 6t$
 3. $V'(t) = 0$ при $t = 6$
 4. 6 принадлежит отрезку $[4, 8]$
 5. $V(4) = 96$ м/с, $V(6) = 108$ м/с, $V(8) = 96$ м/с
 6. $\max_{[4;8]} V(t) = V(6) = 108$ м/с

Задача.

Дождевая капля, начальная масса которой m_0 , падает под действием силы тяжести, равномерно испаряясь так, что убыль массы пропорциональна времени.

Через сколько секунд после начала падения кинетическая энергия капли будет наибольшей?

Решение.

Через искомые t с масса станет равной $m_0 - kt$,

Ответ: $2 m_0 / 3K$





произведение двух положительных множителей, сумма которых постоянна, имеет наибольшее значение при равенстве множителей.

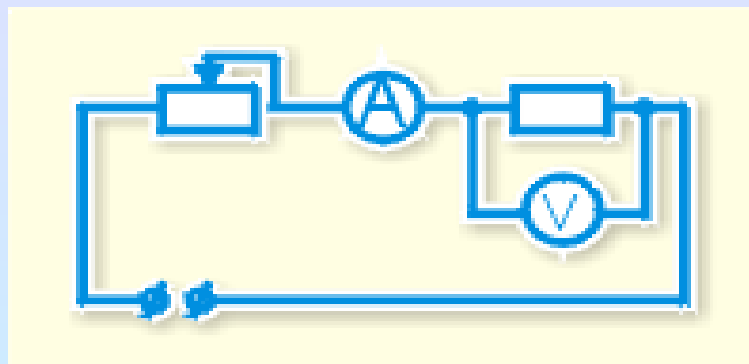
Задача

Электрические заряды $q_1 = 5$ нКл и $q_2 = 11$ нКл расположены на расстоянии r друг от друга.

Как перераспределить заряды, чтобы сила взаимодействия между ними была наибольшей?

Задача.

Источник тока с электродвижущей силой 220 В и внутренним сопротивлением 50 Ом подключен к прибору сопротивлением R . Чему должно быть равна сила тока, чтобы потребляемая мощность была наибольшей? Найдите эту мощность.



1. Мощность, выделяющаяся на реостате при прохождении по нему тока, равна произведению силы тока I на напряжение U на нем: $P = IU$.

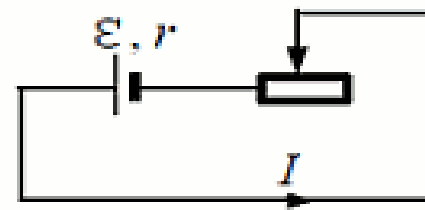


Рис. 1

2. В соответствии с законом Ома для полной цепи, сила тока определяется выражением $I = \frac{\varepsilon}{r + R}$,

а напряжение на реостате можно определить с помощью закона Ома для участка цепи: $U = IR$.

Здесь R – сопротивление части реостата, включенной в цепь.

С помощью приведенных выражений напряжение на реостате можно выразить, как функцию силы тока $U(I) = \varepsilon - Ir$,

что позволяет записать формулу для мощности как функции силы тока в цепи $P(I) = I(\varepsilon - Ir)$.

3. Полученная функция – квадратичная зависимость мощности от силы тока $P(I) = -I^2r + \varepsilon I$, график которой – парабола. Ее ветви направлены вниз, а корни уравнения $P(I) = -I^2r + \varepsilon I = 0$ расположены симметрично относительно положения максимума функции (см. рис. 2).

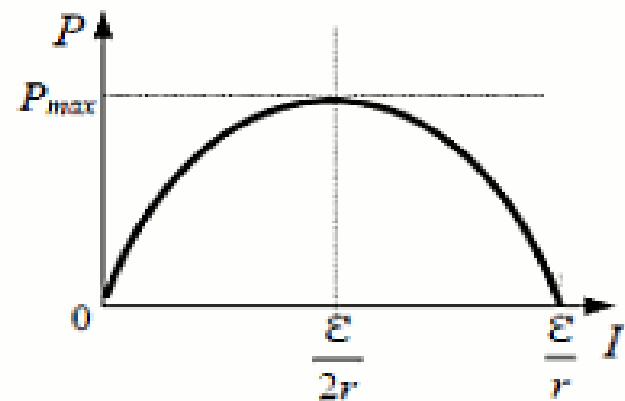


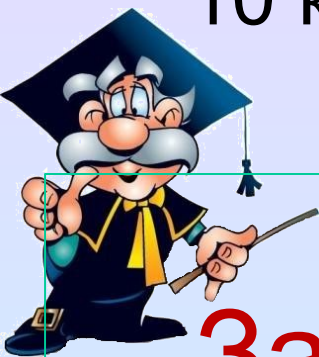
Рис. 2

Так как эти корни: $I_1 = 0$, $I_2 = \frac{\varepsilon}{r}$, то максимум функции мощности $P(I)$

достигается при $I_0 = \frac{\varepsilon}{2r}$, отсюда $P_{\max} = P(I_0) = \frac{\varepsilon^2}{4r}$.

Ответ: $P_{\max} = 4,5$ Вт.

Два корабля плывут со скоростями 20 км/ч и 30 км/ч по прямым, угол между которыми равен 60° , в направлении точки пересечения этих прямых. Найдите наименьшее расстояние между кораблями, если в начальный момент времени расстояния кораблей от точки пересечения прямых были соответственно 10 км и 20 км.



Задача для размышления





Заключение

***«Дифференциальное исчисление-
это описание окружающего нас
мира, выполненное на
математическом языке.***

***Производная помогает нам успешно
решать не только математические
задачи, но и задачи практического
характера в разных областях науки
и техники.»***

“Музыка может возвышать или
умиротворять душу,
Живопись – радовать глаз,
Поэзия – пробуждать чувства,
Философия – удовлетворять
потребности разума,
Инженерное дело –
совершенствовать материальную
сторону жизни людей,
**А математика способна достичь всех
этих целей”.**

*Так сказал американский математик
Морис Клайн.*

Полезные ссылки

- <http://fizportal.ru/practica/6> (Минимумы и максимумы).
- <http://school-collection.edu.ru>
- http://www.abitura.com/open_lessons/open_lesson2.html
- http://www.distedu.ru/mirror/_fiz/archive.1september.ru/mat/2001/05/no05_1.htm

Рефлексия



Всё смог
понять! Уроком
доволен

Не совсем всё
понял, хочу
понять

Ничего не понял

И не хочу
понимать !

Мы хорошо поработали, теперь можно и отдохнуть .

