

ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ  
"ПРИМОРСКИЙ КРАЕВОЙ ИНСТИТУТ РАЗВИТИЯ ОБРАЗОВАНИЯ"  
(ГАУ ДПО ПК ИРО)

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

**РАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА**

Осинцева Наталья Николаевна,  
учитель математики МБОУ «СОШ №2 пгт. Кировский»  
Шкурик Тамара Прокофьевна,  
учитель математики МБОУ «СОШ кп. Горные Ключи»

Оценка \_\_\_\_\_

2023 г

Данный проект содержит информацию о способах и приемах решения рациональных уравнений и неравенств и их систем.

В работе, в доступной форме, изложены методы решения уравнений и неравенств, каждый метод сопровождается примерами, особое внимание уделено решению уравнений и неравенств с параметром. Приведенные материалы способствуют формированию у учащихся умений решать уравнения и неравенства, строить и исследовать простейшие математические модели.

В разработке представлен банк задач для самостоятельной работы по теме «Рациональные уравнения и неравенства».

Рекомендуется использовать для коллективной и индивидуальной работы в школе при подготовке к ЕГЭ по математике профильного уровня.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

1. ВВЕДЕНИЕ.....	3
2. РАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ (НЕРАВЕНСТВА).....	4
3. ОБЩИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ РАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ (НЕРАВЕНСТВ).....	4
3.1.Метод разложения на множители .....	4
3.2.Метод введения новой переменной .....	6
3.3.Функционально-графический метод .....	6
4. АКТУАЛИЗАЦИЯ ОПОРНЫХ ЗНАНИЙ И НАВЫКОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ РАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ.....	8
5. РЕШЕНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ. МЕТОД ИНТЕРВАЛОВ.....	10
6. РЕШЕНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ С ПАРАМЕТРОМ.....	12
7. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ.....	17
8. АПРОБАЦИЯ МЕТОДИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ.....	18
9. ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	23
10. ЛИТЕРАТУРА.....	24

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Рациональные уравнения (неравенства) - важнейшее базовое понятие математики. Прочное его освоение создает условия понимания теории и решения задач.

Для выполнения заданий этого раздела нужно владеть определением корня уравнения (решения неравенства), уметь решать простейшие уравнения и простейшие неравенства. Эти умения позволят успешно применить общие методы решения уравнений (неравенств) (метод замены, метод разложения на множители, графический метод, использование свойств функций) к различным видам уравнений (неравенств).

Решение уравнений (неравенств) любого вида сопряжено с проведением тождественных преобразований различных выражений, входящих в заданное уравнение (неравенство). Владение формулами для тождественных преобразований выражений и теоремами о равносильных уравнениях (неравенствах) поможет в поиске рационального решения.

Если задания базового уровня, используемые в контрольно-измерительных материалах, нередко текстуально совпадают с заданиями учебников, то задания повышенного уровня более разнообразны. Поэтому для подготовки к ЕГЭ полезно специально тренироваться в решении заданий, содержащихся в КИМ или аналогичных им.

### **Цель проекта:**

*Повышение уровня предметных компетенций:*

1. систематизировать информацию о способах и приемах решения рациональных уравнений, неравенств и их систем;
2. составить уравнения и неравенства с демонстрацией решения:
  - 2.1.методом разложения на множители,
  - 2.2.методом подстановки,
  - 2.3.функционально-графическим методом,
  - 2.4.методом интервалов,
  - 2.5.задач с параметром;
3. разработать систему заданий по теме «Рациональные уравнения и неравенства» повышенного и высокого уровня.

### **Задачи проекта:**

*Повышение уровня профессиональных компетенций за счет*

1. использования дополнительных информационных источников, поиска «нового»;
2. формирования у учащихся позитивных эмоций от математической деятельности;
3. обучения умению строить логические рассуждения для выбора наиболее оптимальных способов решения нестандартных задач;

4. формирования логического мышления, интуиции, умений проводить исследования при решении задач с параметром;
5. выявления трудностей и пути их преодоления.

#### **Планируемый результат:**

Учащиеся научатся решать рациональные уравнения и неравенства повышенного и высокого уровня; получают возможность научиться решать высокобалльные задания с использованием полученных навыков по теме проекта

## **2. РАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ (НЕРАВЕНСТВА)**

Если  $f(x)$  – рациональное выражение, то уравнение  $f(x) = 0$  называют рациональным уравнением ( $f(x) < 0$ ,  $f(x) > 0$  – рациональным неравенством). На практике удобнее пользоваться несколько более широким определением: рациональное уравнение – это уравнение вида  $h(x) = q(x)$ , (рациональные неравенства – это неравенства вида  $h(x) > 0$ ,  $h(x) < 0$ ) где  $h(x)$  и  $q(x)$  – рациональные выражения. Рациональные уравнения (неравенства) называются целыми, если и левая, и правая его части являются целыми рациональными выражениями. Если хотя бы одна из частей рационального уравнения (неравенства) является дробным выражением, то такое уравнение (неравенство) называется дробно-рациональным (или дробным рациональным).

## **3. ОБЩИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ РАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ (НЕРАВЕНСТВ)**

### **3.1. Метод разложения на множители**

Суть данного метода при решении уравнений (неравенств) состоит в том, чтобы путем равносильных преобразований представить левую часть исходного уравнения (неравенства), содержащую неизвестную величину в какой-либо степени, в виде произведения двух или более выражений, содержащих неизвестную величину в меньшей степени. При этом справа от знака равенства должен оказаться ноль.

Тогда полученное уравнение можно заменить равносильной совокупностью уравнений:  $f(x) \cdot g(x) \cdot \dots \cdot h(x) = 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = 0, \\ g(x) = 0, \\ \dots \\ h(x) = 0. \end{array} \right.$$

Решив уравнения этой совокупности, нужно взять те корни, которые принадлежат ОДЗ исходного уравнения, а остальные отбросить как посторонние.

(Полученное неравенство  $f(x) \cdot g(x) \cdot \dots \cdot h(x) < 0$ ,  $(f(x)g(x) \dots h(x) < 0)$  решить методом интервалов).

Разложение на множители многочлена может быть осуществлено с помощью различных приемов. К ним можно отнести прием группировки слагаемых, вынесение общего множителя за скобки, замену переменной, применение формул сокращенного умножения, применение метода неопределенных коэффициентов, выделение полного квадрата, дополнение до известной формулы, использование теоремы Безу и схемы Горнера, позволяющие более быстро раскладывать многочлен на множители. Разложение на множители многочлена, стоящего в левой части уравнения, является одним из способов решения уравнений высших степеней.

**Теорема Безу.** Остаток от деления многочлена степени  $n > 0$

$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  на многочлен  $(x - x_0)$  ( $x_0 \in \mathbb{R}$ ) равен значению многочлена  $P_n(x)$  при  $x = x_0$ , т.е. равен числу  $P_n(x_0) = a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + \dots + a_0$

**Следствие из теоремы Безу.** Если  $x_0$  – корень многочлена  $P_n(x)$ , то  $P_n(x_0) = 0$  и, следовательно,  $P_n(x)$  делится на  $(x - x_0)$  без остатка.  $P_n(x) = (x - x_0)R_{n-1}(x)$ .

Таким образом, если известен хотя бы один корень уравнения степени  $n$ , то с помощью следствия из теоремы Безу можно свести задачу к решению уравнения степени  $n - 1$ , т.е., как говорят, понизить степень уравнения.

Если все коэффициенты  $a_0, a_1, \dots, a_n$  ( $a_n \neq 0$ ) многочлена  $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  – целые числа, и рациональное число  $\frac{p}{q}$  ( $\frac{p}{q}$  – несократимая дробь,  $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$ ) является корнем многочлена, то коэффициент  $a_0$  делится на  $p$ , а коэффициент  $a_n$  делится на  $q$ . В частности, если  $a_n = 1$ , и многочлен имеет корень – рациональное число, то этот корень – целое число и является делителем члена  $a_0$ .

**Пример 1.** Решить уравнение  $2x^4 - 9x^3 + 8x^2 + 9x - 10 = 0$ .

Решение. Разложим многочлен  $P_4(x) = 2x^4 - 9x^3 + 8x^2 + 9x - 10$  на множители.

Корни  $P_4(x)$  нужно искать среди чисел  $\pm 1; \pm 2; \pm 5; \pm 10; \pm \frac{1}{2}; \pm \frac{5}{2}$ .

$P_4(1) = 0, P_4(-1) = 0$ . Поделим  $P_4(x)$  на  $(x - 1)$  уголком:

$$\begin{array}{r} 2x^4 - 9x^3 + 8x^2 + 9x - 10 \vee x - 1 \quad \underline{2x^4 - 2x^3 - 7x^2 + x + 10} \quad \underline{-7x^3 + 8x^2 - 7x^3 + 7x^2 + 9x - x} \quad \underline{10x - 10} \quad \underline{10x - 10} \quad 0 \end{array}$$

Продолжим делить полученный остаток на  $(x + 1)$ :

$$2x^3 - 7x^2 + x + 10 \vee x + 1 \quad \underline{2x^3 + 2x^2 - 9x + 10} \quad \underline{-9x^2 + x - 9x^2 - 9x + 10} \quad \underline{10x + 10} \quad \underline{10x + 10} \quad 0$$

Следовательно,  $P_4(x) = (x - 1)(x + 1)(2x^2 - 9x + 10)$ . Решив квадратное уравнение, находим корни  $x_{3,4} = 2; 2,5$  и получаем разложение  $P_4(x) = 2(x - 1)(x + 1)(x - 2)(x - 2,5)$

Таким образом, корни исходного уравнения:  $x = -1; 1; 2; 2,5$ .

### 3.2. Метод введения новой переменной

Если уравнение имеет вид (или его можно свести к виду)  $P(f(x)) = 0$ , то заменой неизвестной  $y = f(x)$  оно сводится к уравнению  $P(y) = 0$ , после нахождения всех корней  $y_1, y_2, \dots, y_n$  которого сводится к решению

совокупности уравнений 
$$\begin{cases} f(x) = y_1, \\ f(x) = y_2, \\ \dots \\ f(x) = y_n. \end{cases}$$

**Пример 2.** Решить уравнение  $x^8 - 17x^4 + 16 = 0$

Решение: обозначим  $x^4 = y$ , получим  $y^2 - 17y + 16 = 0$ , откуда  $y_1 = 1, y_2 = 16$ .

Таким образом, данное уравнение равносильно совокупности уравнений  $\begin{cases} x^4 = 1, \\ x^4 = 16. \end{cases}$

решая которую, получим  $x_{1,2} = \pm 1, x_{3,4} = \pm 2$ .

Ответ.  $x_{1,2} = \pm 1, x_{3,4} = \pm 2$ .

**Пример 3.** Решить уравнение  $(10x-4)(10x-6)(10x-5)^2 = 72$

Решение: произведем замену  $y = 10x - 5$ , получим уравнение  $y^2(y^2 - 1) = 72$  или  $y^4 - y^2 - 72 = 0$ . Отсюда  $y^2 = 9$  или  $y^2 = -8$  (что не имеет смысла).

$$\begin{cases} 10x - 5 = 3, \\ 10x - 5 = -3. \end{cases} \xrightarrow{\text{находим корни}} \begin{cases} x = 0,8, \\ x = 0,2. \end{cases}$$

### 3.3. Функционально-графический метод

Функционально-графический метод является самым красивым и наглядным из общих методов решения уравнений. Это объясняется тем, что он подразумевает использование функций, их свойств и графиков. Рассмотрим сначала примеры решения уравнений с использованием свойств функций без построения их графиков.

**Умножение на функцию.** Иногда решение уравнения существенно упрощается, если умножить обе его части на некоторую функцию – многочлен от неизвестной. При этом нужно помнить, что возможно появление лишних корней – корней многочлена, на который умножали уравнение. Поэтому надо либо умножать на многочлен, не имеющий корней, и получать равносильное уравнение, либо умножать на многочлен, имеющий корни, и тогда каждый из этих корней надо обязательно подставить в исходное уравнение и установить, является ли это число корнем.

**Пример 4.** Решить уравнение  $x^8 - x^6 + x^4 - x^2 + 1 = 0$

Решение. Умножив обе части уравнения на многочлен  $x^2 + 1$ , не имеющий корней, получим уравнение равносильное исходному уравнению. Это уравнение можно записать в виде  $x^{10} + 1 = 0$ . Полученное уравнение не имеет действительных корней, поэтому и исходное уравнение их не имеет.

Ответ: корней нет.

**Пример 5.** Решить графически уравнение  $x^3 + x + 2 = 0$

Решение. Преобразуем уравнение к виду  $x^3 = -x - 2$  и построим в одной системе координат графики функций  $y = x^3$  и  $y = -x - 2$

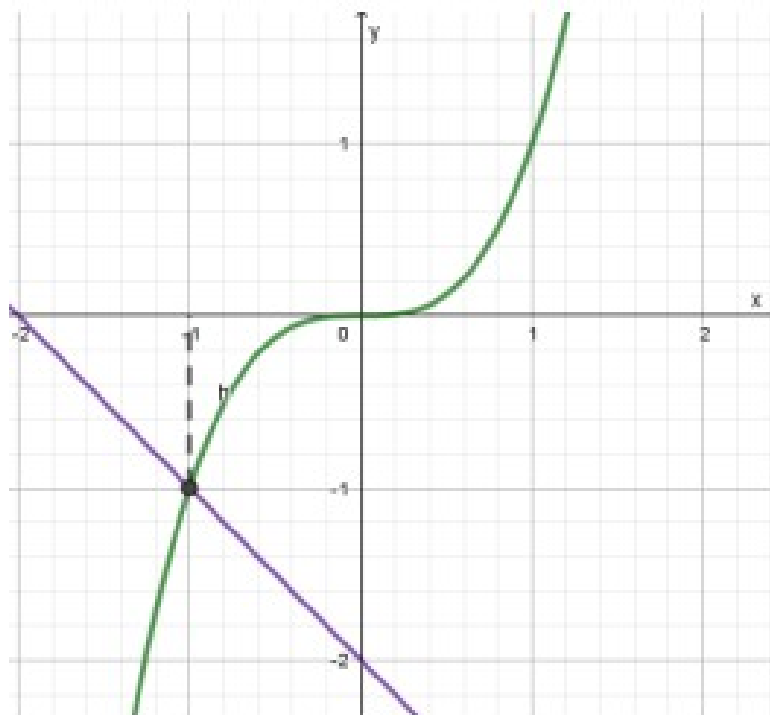


Рис.1

Находим абсциссу точки пересечения графиков  $x = -1$ .

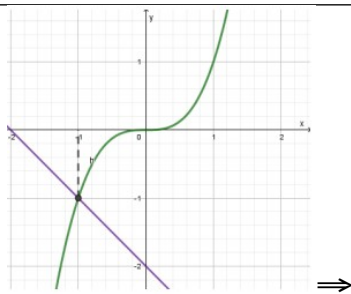
Ответ:  $-1$ .

#### 4. АКТУАЛИЗАЦИЯ ОПОРНЫХ ЗНАНИЙ И НАВЫКОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ РАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Этап решения	Содержание	Подводящие задания
<b>1.</b> Область допустимых значений (для дробно-рациональных уравнений)	$\frac{A(x)}{B(x)} = 0, B(x) \neq 0$	При каких значениях переменной имеет смысл выражение: $1) \frac{x-5}{x^2-1}; 2) \frac{x}{x^2+1}$
<b>2.1. Метод разложения на множители</b>		
2.1.1. Приведение к виду $A(x) = 0 \left( \frac{A(x)}{B(x)} = 0 \right)$	$2x^4 - 9x^3 + 8x^2 = 10 - 9x$ $2x^4 - 9x^3 + 8x^2 + 9x - 10 = 0$	Алгебраические дроби. Упростить выражение: $\frac{t-2}{t-1} - \frac{t-1}{t+1}$
2.1.2. Решение уравнения в случае, если числитель – многочлен степени $n < 3$	$2x^4 - 9x^3 + 8x^2 + 9x - 10 =$ $= (x-1)(x+1)(2x^2 - 9x + 10).$ $x_1 = -1;$	1) Решить уравнение $2x^2 + 3x - 2 = 0;$ 2). Разделить многочлен



ИЛИ разложение левой части (числителя левой части) на множители	$x_2=1$ ; $x_3=2$ ; $x_4=2,5$ .	$2x^3-7x^2+x+10$ на $(x+1)$ ; разложить данный многочлен на множители. 3) Подбор корней многочлена (см. Пример 1).
2.1.3. Соотнесение корней с ОДЗ; проверка.	Отбор корней в соответствии с ОДЗ; Подстановка корней в исходное уравнение.	Решить уравнение: $\frac{x^4-16}{(x-2)^2}=0$
<b>2.2. Метод введения новой переменной</b>		
2.2.1. Замена неизвестной $y = f(x)$ в случае, если уравнение имеет вид (или его можно свести к виду) $P(f(x))=0$	$(10x-4)(10x-6)(10x-5)^2=72$ $y(10x-5)=0 \Rightarrow$ <b>замена <math>y=10x-5</math></b> $y^2(y^2-1)=72$ $y^4-y^2-72=0$ . $y^2=9$ или $y^2=-8$	Решить уравнение: 1) $n^4-6n^2+8=0$ ; 2) Пример 2.
2.2.2. Возврат к исходной переменной	$(10x-5)^2=9$ $10x-5=3$ или $10x-5=-3 \Rightarrow$ $\begin{cases} x=0,8, \\ x=0,2. \end{cases}$	Решить уравнение: 1) $x^2=8$ ; 2) $x^4+12=0$ ; 3) $(4-x^2)^2=4$
2.2.3. Проверка	Подстановка полученных значений в исходное уравнение	Является ли корнем уравнения (3) (см. пункт 2.2.2) число $1\checkmark; 2\checkmark; \sqrt{2}; 3\checkmark; -\sqrt{6}$ ?
<b>2.3. Функционально-графический метод</b>		
<b>2.3.а) Домножение обеих частей уравнения на функцию</b>	1) Домножение на многочлен, не имеющий корней (получение равносильного уравнения), ИЛИ 2*) домножение на многочлен, имеющий корни (возможно получение лишних корней). $x^8-x^6+x^4-x^2+1=0$ $(x^8-x^6+x^4-x^2+1)(x^2+1)$	1) Умножить многочлен $x^8-x^6+x^4-x^2+1$ на $(x^2+1)$ ; 2) Анализ полученного выражения на наличие корней (см. Пример 4). 3) Домножить обе части уравнения $\frac{2t^2+t}{t}-t=0$ на $t$ . Равносильны ли исходное и полученное уравнения?
2.3.а).1.Нахождение корней	Уравнение $x^{10}+1=0$ не имеет корней	1) Найдите ОДЗ левой части уравнения.

		$\frac{2t^2+t}{t} - t = 0$
2.3.а).2. Проверка	Проверка исходного уравнения на лишние корни – корни многочлена, на который умножали уравнение (случай (2*))	Решить уравнение $\frac{2t^2+t}{t} - t = 0$ домножением на $t$ . Появился ли лишний корень?
<b>2.3.б) Графическое решение</b>	Нахождение корней уравнения $f(x)=g(x)$ как абсцисс точек пересечения графиков данных функций	Уравнения линий 1-2 порядка. Преобразования выражений (разложение на множители, выделение полного квадрата).
2.3.б).1. Приведение уравнения к виду $f(x)=g(x)$	$x^3 + x + 2 = 0$ $x^3 = -x - 2$	Графики функций $y=1/x$ , $y=ax+b$ , $y=ax^2+bx+c$ , $y= x $ и др.
2.3.б).2. Построение графиков левой и правой функций	Построение графиков функций $f(x)=x^3$ и $g(x)=-x-2$	Найти точки пересечения графиков функций: $y=\frac{1}{ x }$ и $y=x^2$
2.3.б).3.Определение абсцисс точек пересечения графиков	 <p><math>x=-1</math> – корень уравнения</p>	<p>1) Решить графически: <math>\frac{1}{ x } = 0,5x^2</math></p> <p>2) В чем заключается недостаток данного метода?</p>

## 5. РЕШЕНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ. МЕТОД ИНТЕРВАЛОВ

Метод интервалов основанный на разбиении числовой прямой на интервалы, на каждом из которых выражение сохраняет свой знак.

### *План решения рационального (дробно-рационального) неравенства методом интервалов:*

1. Привести к виду, при котором справа от знака сравнения только число 0.
2. Разложить левую часть (числитель и знаменатель левой части) на множители;

3. Нанести на ось ОХ корни левой части (числителя и знаменателя) в виде точек. Точки выкалывают в случае, если данное неравенство строгое, либо в них знаменатель обращается в 0.
4. Определить знаки во всех промежутках, на которые разбита ось нанесенными точками. Знак крайнего правого интервала совпадает со знаком коэффициента при старшей степени переменной.
5. Записать ответ.

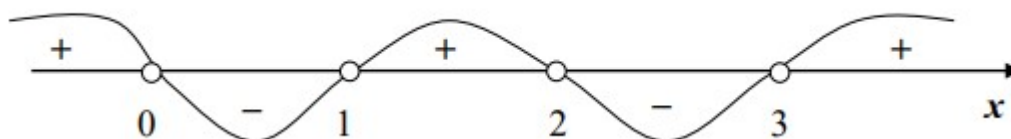
**Правило изменения знака дробно-рациональной функции:** если число  $x_0$  встречается в списке всех корней числителя и знаменателя четное число раз (корень четной степени), то в окрестности  $x_0$  функция не меняет свой знак, если нечетное (корень нечетной степени) – то меняет.

Множество всех решений неравенства  $\frac{A(x)}{B(x)} \geq (\leq) 0$  есть объединение множества всех решений неравенства  $\frac{A(x)}{B(x)} > (<) 0$  и множества всех решений уравнения  $\frac{A(x)}{B(x)} = 0$ .

**Пример 6.** Решить неравенство  $x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x < 0$

Решение. Приведем сначала неравенство к виду, позволяющему применить метод интервалов, т.е. разложим правую часть на множители.

$$x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x = x(x^3 - 6x^2 + 11x - 6) = x(x^3 - x^2 - 5x^2 + 5x + 6x - 6) = x(x-1)(x^2 - 5x + 6) = x(x-1)(x-2)(x-3) < 0.$$

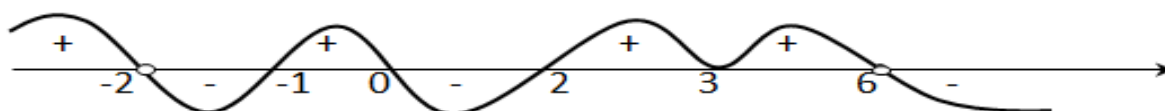


Ответ.  $(0; 1) \cup (2; 3)$

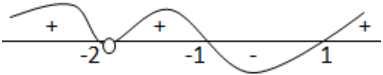
**Пример 7.** Решить неравенство:  $\frac{x^3(x+1)(2-x)(x-3)^2}{(x+2)(x-6)} \leq 0$ .

ОДЗ:  $\begin{cases} x \neq -2 \\ x \neq 6 \end{cases}$ .

- а) Крайний правый знак – « - » (коэффициент при старшей степени неизвестной отрицательный).
- б) Корень  $x=3$  четной степени, следовательно, в окрестности данной точки знак выражения не меняется.
- в) Не забываем включить в решение нули числителя.



Ответ:  $x \in (-2; -1] \cup [0; 2] \cup \{3\} \cup (6; +\infty)$

Этап решения	Содержание	Подводящие задания
1. Приведение к виду, при котором справа от знака сравнения только число 0	$\frac{x^3+2x}{x+2} \leq 1$ $\frac{x^3+2x^2-x-2}{x+2} \leq 0$	Алгебраические дроби. Упростить выражение: $\frac{t-2}{t^2-1} - \frac{t-1}{t+1}$
2. Разложение левой части (числителя и знаменателя левой части) на множители	$\frac{(x-1)(x+1)(x+2)}{x+2} \leq 0$ <b>Сокращать нельзя!</b>	1) Решить уравнение $x^2-x-2=0$ ; 2) Подбор корней многочлена (Пример.1)
3. Нанесение на ось ОХ корней левой части (числителя и знаменателя) в виде точек	Точки выкалывают в случае, если данное неравенство строгое, либо в них знаменатель обращается в 0.	При каких значениях переменной имеет смысл выражение: $1 \cdot \frac{x-5}{x^2-1}; 2 \cdot \frac{x}{x^2+1}$
4. Определение знаков во всех промежутках, на которые разбита ось нанесенными точками. Ответ.	 $x \in [-1; 1]$	Определить знак выражения $(x-\sqrt{3})(\sqrt{5}-x)$ при $x=1,8$ ; 2,3

## 6. РЕШЕНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ С ПАРАМЕТРОМ

Построение геометрических образов и исследование свойств функций часто используется при решении *заданий с параметром*.

**Пример 8.** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение  $4x^2-8|x|+4-a^2=0$  имеет ровно 2 корня.

Решение: Представим уравнение в виде  $4x^2-8|x|+4=a^2$ .

Решаем графически систему уравнений  $\begin{cases} y=4x^2-8|x|+4(1) \\ y=a^2(2) \end{cases}$ .

Преобразуем выражение (1):  $y = \begin{cases} 4x^2+8x+4, \wedge x < 0 \\ 4x^2-8x+4, \wedge x \geq 0 \end{cases}$  или

$$y = \begin{cases} 4(x+1)^2, \wedge x < 0 \\ 4(x-1)^2, \wedge x \geq 0 \end{cases}$$

Строим график функции (1): для отрицательных  $x$  парабола с вершиной в точке  $(-1;0)$ , для положительных  $x$  – с вершиной  $(1;0)$ . Далее строим линии

$$y=4x^2-8|x|+4$$

уровня (2)  $y=a^2$ , на графике пересечения линий  
уровня с графиком  $y=a^2$

Условие будет выполнено

$$a^2 > 4 \Leftrightarrow a^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (a - 2)(a + 2) = 0$$



$$\begin{cases} a < -2, \\ a > 2, \\ a = 0. \end{cases}$$

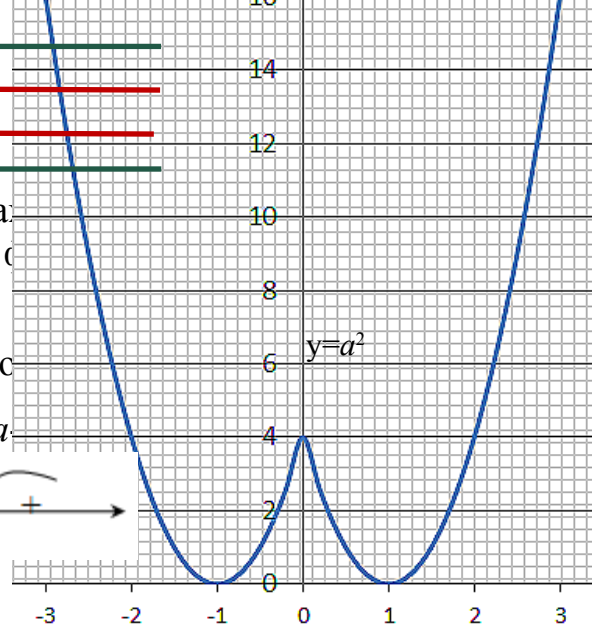


Рис.2

Ответ:  $a \in (-\infty; -2) \cup \{0\} \cup (2; +\infty)$ .

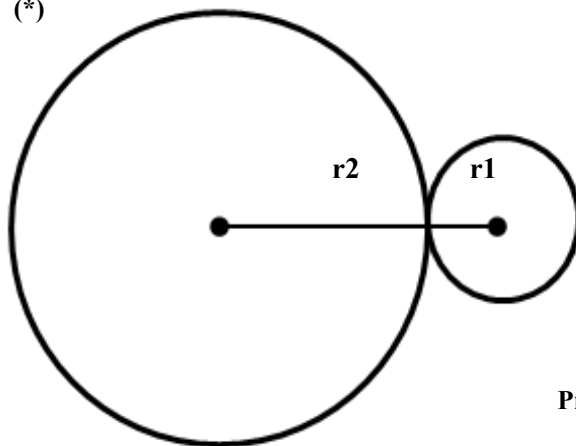
**Пример 9.** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых имеет единственное решение система уравнений  $\begin{cases} (x - 3a - 4)^2 + (y - a + 2)^2 = 1, & (1) \\ (x - 4a - 3)^2 + (y + 3)^2 = 9. & (2) \end{cases}$

Решение: Очевидно, что уравнения (1) и (2) – уравнения окружностей радиусов соответственно 1 и 3.

$$\begin{cases} (x - (3a + 4))^2 + (y - (a - 2))^2 = 1, & (1) \\ (x - (4a + 3))^2 + (y - (-3))^2 = 3^2. & (2) \end{cases}$$

Окружность (1): центр – точка  $O_1(3a + 4; a - 2)$ , радиус  $r_1 = 1$ ; окружность (2): центр – точка  $O_2(4a + 3; -3)$ , радиус  $r_2 = 3$ .

(\*)



(\*\*)

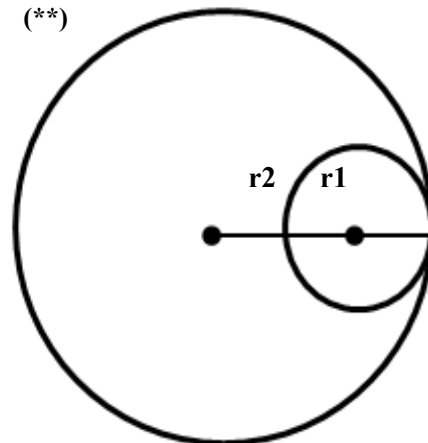


Рис.3

Поскольку система имеет единственное решение, то у данных окружностей одна общая точка, причем касание может быть как внешнее, так и внутреннее (см. рис.3). При этом расстояние между их центрами

$$O_1O_2 = r_1 + r_2 = 4; \quad r_2 - r_1 = 2$$

Формула для расстояния между точками  $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$$O_1O_2^2=(4a+3-3a-4)^2+(-3-a+2)^2=(a-1)^2+(a+1)^2=a^2-2a+1+a^2+2a+1=2a^2+2.$$

$$\begin{cases} 2a^2+2=16, \\ 2a^2+2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a^2=14, \\ 2a^2=2 \end{cases} \begin{cases} a^2=7, \\ a^2=1 \end{cases} \begin{cases} a=\pm\sqrt{7}, \\ a=\pm 1. \end{cases}$$

Ответ:  $\pm 1; \pm \sqrt{7}$ .

**Пример 10.** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система уравнений  $\begin{cases} 2x-2y-2=|x^2+y^2-1|, & (1) \\ y=a(x-1) & (2) \end{cases}$  имеет более двух решений.

Решение: В зависимости от знака выражения под модулем в (1) мы получим 2 линии.

$$1) \begin{cases} x^2+y^2 \geq 1, \\ 2x-2y-2=x^2+y^2-1 \end{cases}$$

$$(x^2-2x+1)-(y^2+2y+1)-1-1+2=0$$

$$\begin{cases} (x-1)^2+(y+1)^2=1, \\ x^2+y^2 \geq 1 \end{cases} \quad (3) \quad \text{- дуга окружности с центром в точке (1; -1) радиуса 1 с ограничением (3) .}$$

$$2) \begin{cases} x^2+y^2 < 1, \\ 2x-2y-2=-x^2-y^2+1 \end{cases}$$

$$(x^2+2x+1)-(y^2-2y+1)-1-1-2=0$$

$$\begin{cases} (x+1)^2+(y-1)^2=5, \\ x^2+y^2 < 1 \end{cases} \quad (4) \quad \text{- дуга окружности с центром в точке (-1; 1) радиуса } \sqrt{5} \text{ с ограничением (4) .}$$

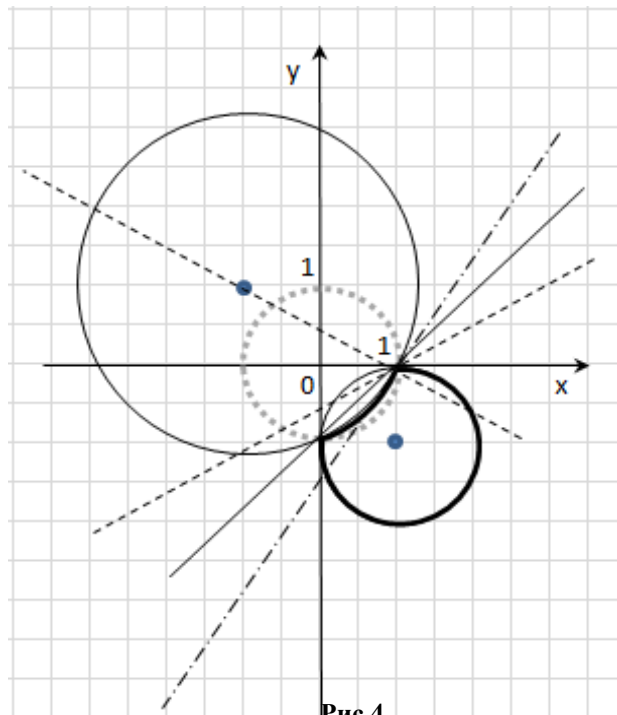


Рис.4

Дуги окружностей, полученных при исследовании уравнения (1), построены с учетом ограничений на рис.4 (4-ая четверть координатной плоскости).

Теперь рассмотрим прямую, заданную уравнением (2). Прямая пересекает оси ОХ и ОУ в точках (1; 0) и (0; -a). При  $a=1$  прямая (проведена сплошной линией на рис.3) имеет 2 общие точки с дугами окружностей – это точки (1; 0) и (0; -1) – первое крайнее положение.

При уменьшении  $a$  прямая не будет пересекать данные дуги более, чем в двух точках, одна из которых – (1; 0).

Для того, чтобы общих точек было больше двух, необходимо достичь еще одного пересечения с дугой большой окружности ( $r=\sqrt{5}$ ). Поэтому ищем второе крайнее положение прямой.

Найдем значение параметра  $a$ , при котором прямая (2) является касательной к данной окружности.

Для этого должно выполняться условие  $a=y'(1)$

$$(y-1)^2 = 5 - (x+1)^2$$

$$|y-1| = \sqrt{5 - (x+1)^2}$$

$$1-y = \sqrt{5 - (x+1)^2} \Rightarrow y = 1 - \sqrt{5 - (x+1)^2}$$

$$y' = \frac{-2(x+1)}{2\sqrt{5 - (x+1)^2}} = \frac{x+1}{\sqrt{5 - (x+1)^2}}$$

$$a = \frac{2}{\sqrt{5-4}} = 2$$

Мы нашли второе крайнее положение прямой, при котором прямая является касательной к дуге большой окружности, и решений будет ровно 2.

Таким образом, при значениях  $a$  из интервала (1; 2) прямая (2) будет пересекать дуги большей и меньшей окружностей в точках, не лежащих на координатных осях. С учетом точки (1; 0) имеем 3 точки пересечения.

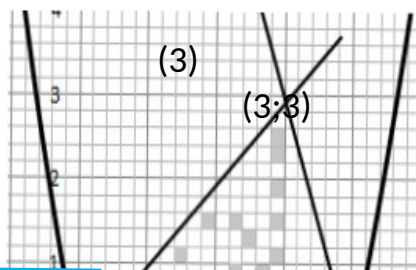
Ответ:  $a \in (1; 2)$

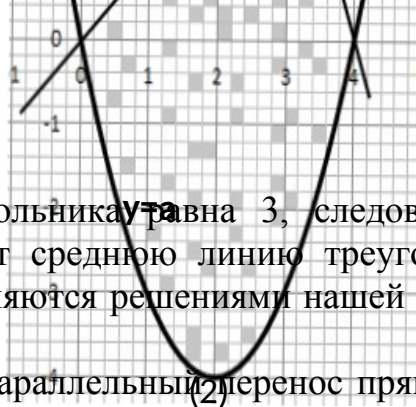
**Пример 11.** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых решением системы неравенств 
$$\begin{cases} a+3x \leq 12, (1) \\ a+4x \geq x^2, (2) \\ a \leq x (3) \end{cases}$$
 является отрезок, длина которого равна 2

**Решение:** Перепишем неравенства в системе: 
$$\begin{cases} 12-3x \geq a, (1) \\ x^2-4x \leq a, (2) \\ x \geq a (3) \end{cases}$$

Построив графики левых частей неравенств (см. рис.5), находим область ограничений для параметра  $a$ . Прямая  $y=a$  пересекает область, если  $a \in (-4; 3)$ .

- 1) Отрезок длины 2 есть средняя линия треугольника с координатами (0; 0), (3; 3), (4; 0), т.к. его основание длины 4.





Высота данного треугольника равна 3, следовательно, делим пополам. Прямая  $y=1,5$  содержит среднюю линию треугольника, при этом все те значения  $x$ , которые являются решениями нашей системы, лежат на отрезке длины 2.

2) Осуществляя параллельный перенос прямой  $y=a$  вниз, приходим к выводу, что есть еще значение  $a$ , удовлетворяющее условиям нашей задачи. Парабола  $y=x^2-4x$  имеет ось симметрии  $x=2$ , следовательно, от нее равноудалены на расстояние, равное 1, две точки:  $x_1=1$  и  $x_2=3$ , расстояние между этими точками равно 2.

$y(1)=y(3)=3^2-4*3=-3$ . Прямая  $y=-3$  содержит отрезок длины 2, заключенный между ветвями параболы  $y=x^2-4x$ . Второе значение параметра найдено.

Ответ:  $a=1,5$  ;  $-3$



## 7. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Решить уравнение:  $x^4 + 3x^3 - 8x^2 = 12x - 16$
2. Решить уравнение:  $\frac{x^3 - 6x^2 + 3x + 10}{x^3 + 2x^2 - 5x - 6} = 0$
3. Решить уравнение:  $(2x+3)(2x+7)(2x+5)^2 = 192$
4. Решить неравенство:  $(x-5)^2(x+4)^3(x-6)^4(x-2) \leq 0$
5. Решить неравенство:  $\frac{(3-2x)(4x+6)(x-9)}{4x+6} \leq 0$
6. Решить неравенство:  $\frac{(x^2+2x-2)^2}{x^2+2x-4} > x^2+2x+4$
7. Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых решением неравенства  $x^2 - 4a - ax + 4x \leq 0$  является отрезок 1) длины 6, 2) длины, меньшей 5.
8. Найти все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение  $x^3 + 3x^2 - 24x - a^2 = 0$  имеет 1) 2 решения, 2) более двух решений, 3) единственное решение.
9. Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система уравнений  $\begin{cases} x^2 + y^2 + 10a^2 - 2ax + 6ay = 1, \\ x^2 + 2ay + a^2 + 2x + y^2 = 3. \end{cases}$  имеет единственное решение.
10. Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых решением системы неравенств  $\begin{cases} x^2 - a \leq 4, \\ x + 2 \geq a, \\ x \leq 2 - a \end{cases}$  является отрезок, длина которого равна 2.

## Ответы

**№1.** -4; -2; 1; 2. **№2.** 5. **№3.** -0,5; -4,5. **№4.**  $[-4; 2] \cup \{5; 6\}$ . **№5.**  $(-\infty; -1,5) \cup (-1,5; 1,5] \cup [9; +\infty)$ . **№6.**  $(-1-\sqrt{6}; -1-\sqrt{5}) \cup (-1+\sqrt{5}; -1+\sqrt{6})$ . **№7.** 1) 2; -10; 2) (-9; 1). **№8.** 1)  $\pm 4\sqrt{5}$ ; 2)  $(-4\sqrt{5}; 4\sqrt{5})$ ; 3)  $(-\infty; -4\sqrt{5}) \cup (4\sqrt{5}; +\infty)$ . **№9.** -0,4; 0;  $\frac{-1-\sqrt{41}}{5}$ ;  $\frac{-1+\sqrt{41}}{5}$ . **№10.** -3; 1.

## 8. АПРОБАЦИЯ МЕТОДИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ

В апробации пакета приняли участие учащиеся 10 и 11 классов, планирующих сдавать ЕГЭ по математике профильного уровня.

Каждый участник апробации получил методические материалы.

Всего к решению приступили 18 учеников. №№1-6 выполняли все учащиеся, 3 одиннадцатиклассника решали задания 7-10 с параметром.

№ задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Кол-во выполнявших	18	18	18	18	18	18	3	3	3	3
Кол-во верно решенных	17	18	16	18	15	16	3	2	3	3

### По мнению учащихся

1. весь необходимый теоретический материал рассмотрен в достаточной мере и в доступной форме;
2. разобранные примеры демонстрируют применение изложенных методов на практике;
3. указан перечень опорных знаний и умений, необходимых для успешного выполнения самостоятельной работы;

4. *п*римеры и более
5. *н*е хватает

что по



*№ 1*

*производим деление многочленов.*

$$\begin{array}{r} x^4 + 3x^3 - 8x^2 - 12x + 16 : (x-1) \\ \underline{-(x^4 - x^3)} \phantom{+ 16} \\ 4x^3 - 8x^2 - 12x + 16 \\ \underline{-(4x^3 - 4x^2)} \phantom{+ 16} \\ -4x^2 - 12x + 16 \\ \underline{-(-4x^2 + 4x)} \phantom{+ 16} \\ -16x + 16 \\ \underline{-(-16x + 16)} \\ 0 \end{array}$$

*подбираем корни:*

$x=1: 1+3-8-12+16=0 \checkmark$   
 $x-1=0$

*пишем уравнение:*

$(x-1)(x^3+4x^2-4x-16)=0$

*решаем вторую часть уравнения:*

$x^3+4x^2-4x-16=0$

*подбираем корни:*

$x=1: 1+4-4-16=-15 \neq 0$

*производим деление многочленов.*

$$\begin{array}{r} x^3 + 4x^2 - 4x - 16 : (x+1) \\ \underline{-(x^3 + x^2)} \phantom{- 16} \\ 3x^2 - 4x - 16 \\ \underline{-(3x^2 + 3x)} \phantom{- 16} \\ -7x - 16 \\ \underline{-(-7x - 7)} \phantom{- 16} \\ -9 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^3 - 2x^2 - 5x - 6 \neq 0 \\ x^3 - 6x^2 + 3x + 10 = 0 \\ \underline{-(x^3 - x^2)} \phantom{+ 10} \\ -5x^2 + 3x + 10 \\ \underline{-(-5x^2 + 5x)} \phantom{+ 10} \\ -2x + 10 \\ \underline{-(-2x + 10)} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^3 + 2x^2 - 5x - 6 : (x+1) \\ \underline{-(x^3 + x^2)} \phantom{- 6} \\ x^2 - 5x - 6 \\ \underline{-(x^2 + x)} \phantom{- 6} \\ -6x - 6 \\ \underline{-(-6x - 6)} \\ 0 \end{array}$$

$D = 1 + 24 = 25$   
 $x_{1,2} = \frac{-1 \pm 5}{2}$   
 $x_1 \neq -3$   
 $x_2 \neq 2$   
 $x_3 \neq -1$

$$5) \frac{(3-2x)(4x+6)(x-9)}{4x+6} \leq 0$$

$$\begin{cases} (3-2x)(4x+6)(x-9) \leq 0 \\ 4x+6 > 0 \end{cases}$$

$$4x > -6$$

$$x > -\frac{3}{2}$$

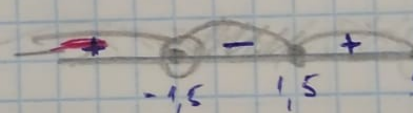
$$x > -1,5$$

$$(3-2x)(4x+6)(x-9) \leq 0$$

$$\text{rad } 0$$

$$3-2x=0 \quad 4x+6=0 \quad x-9=0$$

$$-2x=-3 \quad 4x=-6 \quad x=9$$

$$x=\frac{3}{2}=1,5 \quad x=-1,5$$


Omben:  $x \in [-1,5; 1,5] \cup [9; \infty)$

Omben:  $(-\infty; -1,5) \cup [-1,5; 1,5] \cup [9; \infty)$

$$11.3 \quad (2x+3)(2x+4)(2x+5)=192 \quad \frac{11}{0}$$

$$t=2x+5$$

$$(t-2)(t+2)(t^2)=192$$

$$(t^2-4) \cdot t^2=192$$

$$t^4-4t^2-192=0$$

$$t^2=y$$

$$y-4y-192=0$$

$$-3y-192=0$$

$$-3y=192$$

$$y=-64$$

$$t^2=-64$$

$$t=\pm 8i$$

$$2x+5=8i$$

$$2x=8i-5$$

$$x=4i-2,5$$

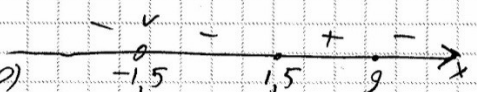
$$2x+5=-4$$

$$2x=-9$$

$$x=-4,5$$

Omben:  $-0,5; -4,5$

$$11.5 \quad \frac{(3-2x)(4x+6)(x-9)}{(4x+6)} \leq 0$$

$$\frac{-(x-1,5)(x+1,5)(x-9)}{(x+1,5)} \leq 0$$


Omben:  $(-\infty; -1,5) \cup [-1,5; 1,5] \cup [9; +\infty)$

$x \in (-\infty; -1,5) \cup [-1,5; 1,5] \cup [9; +\infty)$



нз

$$x^2 - 4a - ax + 4x \leq 0$$

①. Окружность

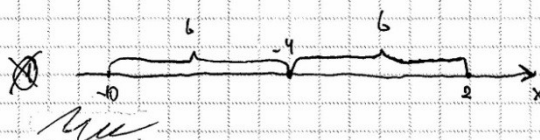
②. Окружность, меньше 5

$$x(x-a) + 4(x-a) \leq 0$$

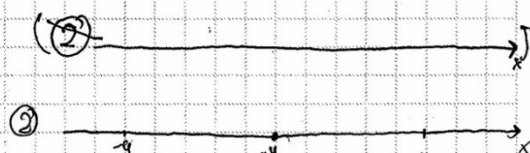
$$(x-a)(x+4) \leq 0$$

$$x=a$$

1) Окружность, меньше 6 при  $a = -10, a = 2$



2) Окружность, меньше 6:  $a \in (-9; 1)$



Ответ: 1)  $a = -10; a = 2$   
2)  $a \in (-9; 1)$

5:8

$$x^3 + 3x^2 - 24x - a^2 = 0$$

$x^3 + 3x^2 - 24x = a^2$  - решение является пересечением графиков  $y_1 = x^3 + 3x^2 - 24x$  и  $y_2 = a^2$ , где  $y_2 = a^2$  - прямая параллельная оси  $x$ .  
проведем анализ функции  $y_1$ :

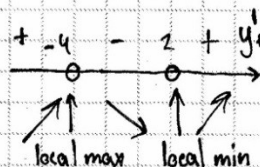
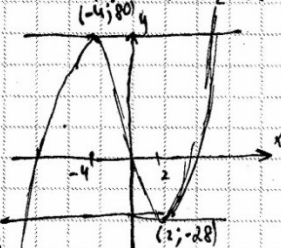
$$y_1' = 3x^2 + 6x - 24 = 0$$

$$x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$x_1 = -4, x_2 = 2$$

$$y_1(-4) = -64 + 48 + 96 = 80$$

$$y_1(2) = 8 + 12 - 48 = -28$$



1) 2 решения пересекаются в точках экстремумов:  
 $a_1^2 = 80 \Rightarrow a = \pm \sqrt{80}$   
 $a_2^2 = -28 \Rightarrow a = \pm \sqrt{-28}$

Ответ:  $a = \pm \sqrt{80}$

2) > 2 решения в промежутках на оси  $y$  от -28 до 80:

$$-28 < a^2 < 80 \Rightarrow 0 < a^2 < 80 \Rightarrow a \in (-\sqrt{80}; \sqrt{80}) \quad \text{Ответ: } a \in (-\sqrt{80}; \sqrt{80})$$

3) 1 решение в промежутках на оси  $y$  до -28 и от 80:

$$\begin{cases} a^2 > 80 \\ a^2 < -28 \\ a^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow a^2 > 80 \Rightarrow a \in \mathbb{R} \setminus [-\sqrt{80}; \sqrt{80}] \quad \text{Ответ: } a \in \mathbb{R} \setminus [-\sqrt{80}; \sqrt{80}]$$

$$\textcircled{1} \begin{cases} x^2 + y^2 + 10a^2 - 2ax + 6ay = 1 \\ x^2 + y^2 + 2ay + a^2 + 2x + y^2 = 3 \end{cases} \sim 9$$

$$\textcircled{1}: x^2 - 2ax + y^2 + 6ay + 9a^2 = 1$$

$$(x-a)^2 + (y+3a)^2 = 1 \Rightarrow (x-a)^2 + (y-(-3a))^2 = 1^2$$

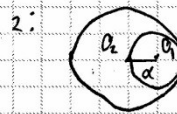
$$\textcircled{2}: x^2 + 2x + 1 + y^2 + 2ay + a^2 = 3 + 1$$

$$(x+1)^2 + (y+a)^2 = 4 \Rightarrow (x-(-1))^2 + (y-(-a))^2 = 2^2$$

$$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-(-3a))^2 = 1^2 \\ (x-(-1))^2 + (y-(-a))^2 = 2^2 \end{cases} \begin{matrix} (O_1 - \text{окружность с центром в} \\ \text{точке } (a; -3a)) \\ (O_2 - \text{окружность с центром в } (-1; -a)) \end{matrix}$$



$$d=3; r_1=1; r_2=2$$



$$d=1; r_1=1; r_2=2$$

$$d = \sqrt{(x_{O2} - x_{O1})^2 + (y_{O2} - y_{O1})^2}$$

$$d^2 = (x_{O2} - x_{O1})^2 + (y_{O2} - y_{O1})^2 = (-1-a)^2 + (-a+3a)^2 = a^2 + 2a + 1 + 4a^2 = 5a^2 + 2a + 1$$

$$\textcircled{1} \begin{cases} 5a^2 + 2a + 1 = 1 \\ 5a^2 + 2a + 1 = 9 \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} 5a^2 + 2a + 1 = 1 \\ 5a^2 + 2a + 1 = 9 \end{cases}$$

$$\textcircled{2}: 5a^2 + 2a - 8 = 0$$

$$D = 4 + 160 = 164 = 4 \cdot 41$$

$$a_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{164}}{10} = \frac{-1 \pm \sqrt{41}}{5}$$

$$\textcircled{1}: 5a^2 + 2a = 0$$

$$a(5a+2) = 0$$

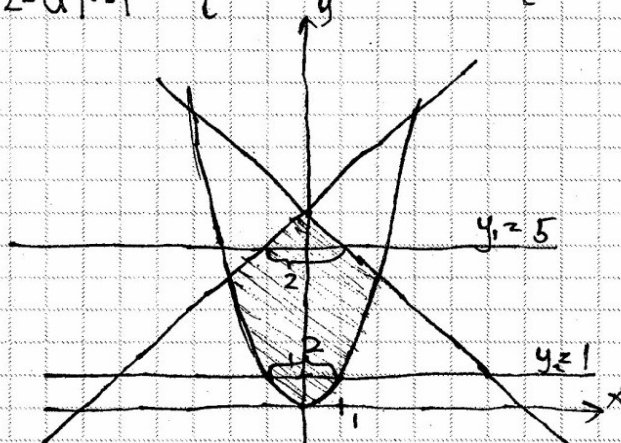
$$a \in \{0, -0,4\}$$

$$a=0 \text{ или } a=-0,4$$

$$\begin{cases} x^2 - a \leq 4 \\ x + 2 \geq a \\ x \leq 2 - a \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 \leq a+4 \\ x+2 \geq a+4 \\ -x \geq a-2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 \leq a+4 \\ x+6 \geq a+4 \\ -x+2 \geq a+4 \end{cases} \sim 10$$



$$y_1 = 5 = a_1 + 4 \quad a_1 = 1$$

$$y_2 = 1 = a_2 + 4 \quad a_2 = -3$$

$$\text{Ответ: } a \in \{-3; 1\}$$

**При решении неравенств учащимися были допущены ошибки:**

1. неверное определение знака на крайнем правом интервале в результате ошибки подсчета знака коэффициента при старшей степени переменной;
2. чередование знака в окрестности точки, обозначающей корень четной кратности.

**В ходе работы над проектом**

3. систематизирована информация о способах и приемах решения рациональных уравнений, неравенств и их систем;
4. продемонстрированы примеры применения данных методов на практике;
5. разработана система заданий повышенного и высокого уровня по теме.

**В ходе апробации**

1. учащиеся справились с заданиями, применили рассмотренные в теории методы; учащиеся 11 класса решили задачи с параметром.
2. Получены позитивные отзывы учащихся о содержании материалов.

**Вывод:**

Успешное выполнение практической работы мотивирует учащихся к исследовательской деятельности, повышает самооценку собственных возможностей, пробуждает интерес к математике.

Цели проекта достигнуты. Задачи выполнены.

## **9. ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

Приведенные материалы способствуют формированию у учащихся умений решать уравнения и неравенства, строить и исследовать математические модели.

Метод интервалов – универсальный метод решения неравенств вида  $f(x) \nu 0$ , где  $\nu$  – один из знаков  $<$ ,  $>$ ,  $\leq$ ,  $\geq$ , а  $f(x)$  – не обязательно рациональная функция, она может быть логарифмической, показательной, иррациональной, тригонометрической. Полученные навыки дадут выпускникам возможность достичь более высоких результатов на ЕГЭ.

Задание с параметром оценивается в 4 первичных балла. Именно поэтому учащиеся выпускных классов обращают на него внимание и желают решать. Есть мнение, что не существует универсальных методов решения таких задач, есть только общие подходы. Достичь успеха здесь можно, постоянно совершенствуя свои практические и исследовательские навыки, интуицию.

Мы надеемся, что данный пакет станет также методическим пособием учителю математики при подготовке выпускников к ЕГЭ.

***Желаем успеха!***

## 10. ЛИТЕРАТУРА

1. Элементарная математика. Рациональные уравнения и неравенства / А.В.Фирер, Е.Н. Яковлева, А.П. Елисова, Т.В. Захарова; отв. ред. Н.К. Игнатьева. – Красноярск: Сибирский федеральный университет, 2019.
2. Математика. Профильный уровень. Единый государственный экзамен. Готовимся к итоговой аттестации: [учебное пособие] / А.В. Семенов, А.С. Трепалин, И.В. Ященко, И.Р. Высоцкий, Л.А. Титова; под ред. И.В. Ященко; Московский центр непрерывного математического образования. – Москва: Издательство «Интеллект- Центр», 2023.