***Введение***

Многие математические задачи возникают при решении практических проблем, возникающих в человеческой деятельности. С одной из таких задач мне предложил познакомиться мой школьный учитель математики. Это так называемая проблема четырёх красок.

Географы, раскрашивая карты, стараются обойтись меньшим количеством цветов, при этом раскрашивают их с таким расчётом, чтобы две страны, имеющие общую часть границы, были окрашены разными цветами. В 1852 году Френсис Гутри, раскрашивая карту графств Англии, заметил, что для такой цели ему хватает четырех красок, а вот тремя красками – не обойтись.

Возник естественный вопрос: для раскраски любой ли карты хватит четырех красок? Студент Френсис не смог ответить на него. Через своего брата, Фредерика, сообщили об этом наблюдении известному английскому математику О. Де Моргану. Так эта проблема дошла до математической общественности, и точную формулировку гипотезы опубликовал в 1878 году другой английский математик А. Кэли: ***всякую ли расположенную на сфере карту можно раскрасить четырьмя красками так, чтобы любые две области, имеющие общий участок границы, были раскрашены в разные цвета.***

В связи с этим, меня также заинтересовал этот вопрос. Данная проблема актуальна, потому что по окончании 9 класса, я хочу сдавать экзамен географию. Хотелось бы связать свою жизнь и будущую профессию с двумя науками: математика и география.

*Целью* моей работы является обобщение и осмысление математических закономерностей изучить теорему четырёх красок.

Для достижения этой цели я поставила перед собой такие*задачи*:

* проанализировать научную и научно-популярную литературу по теме исследования;
* провести исследование по данной теме;
* Проверить данную теорему на практике

Задачи определили *этапы работы* (чтение книг и статей, знакомство с содержанием сайтов в интернете, наблюдение, фотографирование цветов, установление разделов математики, описывающих данное явление, оформление работы) и *методы исследования*(анализ, синтез, равнение, классификация закономерностей, обобщение).

**Введение в топологию.**

В середине ХIX столетия возникло совершенно новое течение в геометрии, которому было суждено вслед за тем стать одной из главных движущих сил современной математики. Предметом новой отрасли, называемой топологией (или analysis situs), является изучение свойств геометрических фигур, сохраняющихся даже тогда, когда эти фигуры подвергаются таким преобразованиям, которые уничтожают все их и метрические и проективные свойства.  
  
Стартовав как раздел геометрии, топология быстро внедрилась и во многие другие области математики. Кажется почти правильным утверждение, что топология представляет собой особое состояние ума и преследует свои собственные цели. В некотором смысле слова топологии – это наука, изучающая непрерывность: исходя из непрерывности пространства или форм, она переходит к обобщениям, которые затем по аналогии приводят к новому пониманию непрерывности, а «обычное» пространство, как мы себе его представляем, остаётся далеко позади.  
  
Тополог интересуется теми свойствами «предметов» (трактуемых нами пока в геометрическом смысле), которые наиболее устойчивы, то есть которые выдерживают деформации сжатия и растяжения.  
  
Все это может навести на мысль, что топология занимается придумыванием строгих доказательств для таких истин, в которых не станет сомневаться ни один здравомыслящий человек. Но это совсем не так: существует много вопросов топологического характера, в числе которых иные формулируются чрезвычайно просто и на которые интуиция не дает удовлетворительных ответов. Примером может служить знаменитая "проблема четырех красок".

**История возникновения теоремы**

Спустя год появилось первое доказательство гипотезы, которое представил В. Кемпе. Но через одиннадцать лет П. Хивуд обнаружил в нем ошибку, но извлёк из него важное, доказав, что для раскраски любой карты, даже самой сложной конфигурации, достаточно пяти красок.

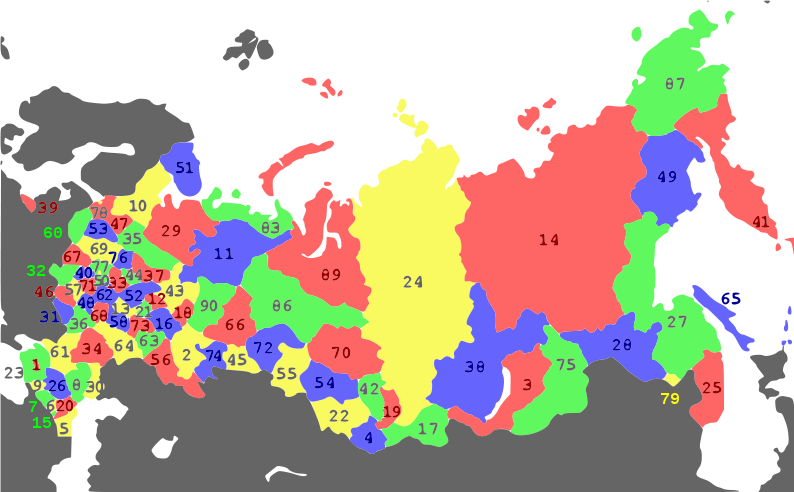
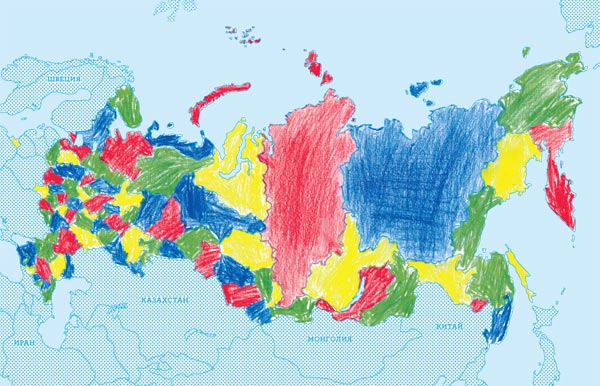
За первым ошибочным доказательством последовало множество других. Проблемой четырех красок занимались многие известные математики прошлого, но гипотеза не спешила раскрывать все свои секреты. После многих неудачных попыток доказать гипотезу для любого числа стран, математики решили доказать её, начиная с малых натуральных чисел. Так П. Франклин в 1913 году доказал гипотезу для карты в которой не более чем 25 стран, со временем он увеличил это число до 38.

С увеличением числа стран лавинообразно растет и число различных вариантов их взаимного расположения, и число вариантов раскраски карт. Проблема становилась совершенно неприступной.

Более ста лет математикам не удавалось получить доказательство. Лишь в 1976 К. Аппель и В. Хакен из Иллинойского университета смогли доказать гипотезу. Своего успеха они добились благодаря новаторскому шагу, – применение компьютера в доказательстве математической теоремы. Идея их доказательства состояла в следующем: сначала доказывается возможность раскраски для карт с числом n стран, 0, затем с помощью компьютера подтверждается возможность раскраски карт и для0. Потратив свыше тысячи часов машинного времени, перебрав громадное число вариантов, компьютер подтвердил справедливость гипотезы. Таким образом, вековая проблема четырех красок была решена.

Пытались решить эту проблему и наши соотечественники. Так, в 1964 году В. А. Горбатов предложил своё классическое, с его слов, доказательство проблемы. Но математическое сообщество никак не отреагировало на него, и не подтвердив его, и не опровергнув.

Я тоже попробовала самостоятельно раскрашивать карты, чтобы убедиться в том, что для раскраски любой конкретной карты хватает четырех красок. Так я раскрасила карту Российской Федерации.



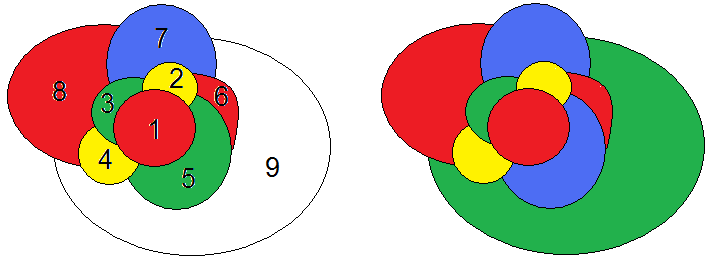
Раскрашивая карту, я обратила внимание и на то, что её нельзя раскрасить тремя красками. В самом деле, если рассмотреть четыре территории Чукотский автономный округ, Камчатский край, Республика Якутия, Магаданская область, то можно заметить, что Чукотский автономный округ, окружен только тремя этими территориями. Это значит, если территорию Чукотского округа покрасить первым цветом, то для покраски территорий Камчатского края, Республики Якутия, Магаданской области потребуется ещё три цвета.

**Игра «Четыре краски»**

Познакомившись с проблемой четырёх красок, известный американский популяризатор математики Стивен Барр придумал логическую игру на бумаге для двух игроков и бесхитростно назвал её «Четыре краски». Вот простые правила этой любопытной игры для двоих:

*Для этой игры нужны четыре цветных карандаша. Первый игрок чертит произвольную область, второй игрок раскрашивает её в любой из этих четырёх цветов и присоединяет свою область. Первый игрок в свою очередь раскрашивает область второго игрока и добавляет новую область, и далее каждый игрок раскрашивает область соперника и добавляет свою. При этом области, имеющие общую границу, должны быть раскрашены в разные цвета. Проигрывает тот, кто на своём ходу вынужден будет взять пятую краску.*

Я познакомила с этой игрой своих одноклассников, и мы с удовольствием играем в эту игру в свободное время. Выигрышной стратегии мы пока не нашли, но некоторые тактические приёмы научились применять. На рисунке ниже приведена типичная картинка, которая остается после очередной игры «Четыре краски».



Здесь натуральными числами обозначен порядок появления областей на игровой схеме. Понятно, что нечетными числами обозначены области, нарисованные первым игроком, четными – вторым игроком. По правилам игры, когда первый игрок нарисовал 9-ую область, второй должен её закрасить, но для этого ему потребуется пятый цвет, значит, он проиграл.

Это ни в коей мере не означает, что таким рисунком опровергается гипотеза. Раскрасить области этой схемы можно по-другому (рис. справа) так, чтобы выполнялись все условия раскраски, а лишь подтверждает трудность доказательства проблемы. По этому поводу М. Гарднер сказал: «Я не знаю лучшего способа понять трудности, которые встречаются на пути решения проблемы четырёх красок, чем просто поиграть в эту любопытную игру»

В Интернете я нашла один из вариантов этой игры, его можно найти по адресу: <http://www.iqfun.ru/online-games/four-color.shtml>.

Существуют также следующие вариации игры:  
  
1. Карта заранее разбивается случайным образом на области различной величины, и каждый ход игры меняется игрок который закрашивает область, а также меняется цвет (в строгой последовательности). Таким образом каждый игрок закрашивает карту только двумя цветами, а в случае если не может закрасить так, чтобы области, имеющие общую границу были раскрашены в разные цвета. пропускает ход. Игра прекращается, когда ни один из игроков больше не сможет сделать ни одного хода. Выигрывает тот, у кого общая площадь закрашенных им областей больше.  
  
  
2. Квадрат разбит на несколько квадратов (в основном 4x4), и его стороны окрашены в один из четырех цветов (каждый в разный цвет). Первым ходом закрашивается квадрат прилегающий к стороне, каждый последующий ход можно закрашивать тот квадрат, который прилегает к одному из закрашенных квадратов. Нельзя закрашивать квадрат теми цветами, которыми закрашен один из прилегающих к нему квадратов (в том числе и по диагонали) или прилегающая к квадрату сторона. Выигрывает игрок, делающий последний ход.

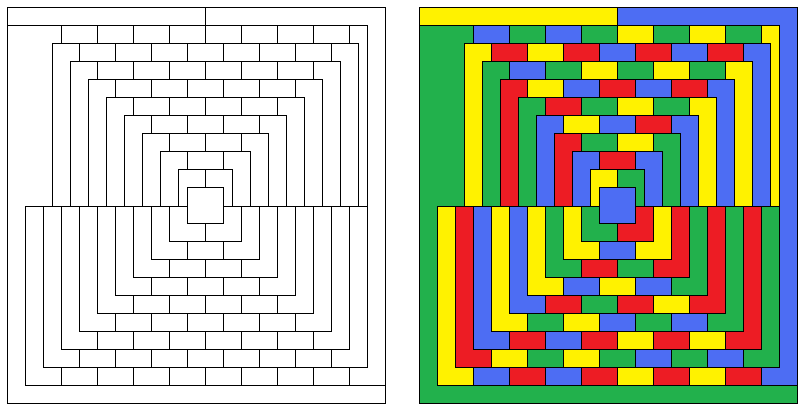
**Задачи данной тематики**

Далее приведу несколько задач данной тематики, которые обязаны своим рождением, так долго не решаемой проблемы четырех красок.

Первая задача была напечатана в американском журнале «В мире науки» в 1975 году, за год до решения проблемы четырех красок. Автор задачи утверждал, что предложенную в ней карту (рисунок слева) нельзя раскрасить нужным образом в четыре цвета, и с помощью такого контрпримера хотел опровергнуть гипотезу. Но читатели журнала смогли раскрасить карту (рисунок справа), и этим ещё один раз подтвердили справедливость гипотезы.

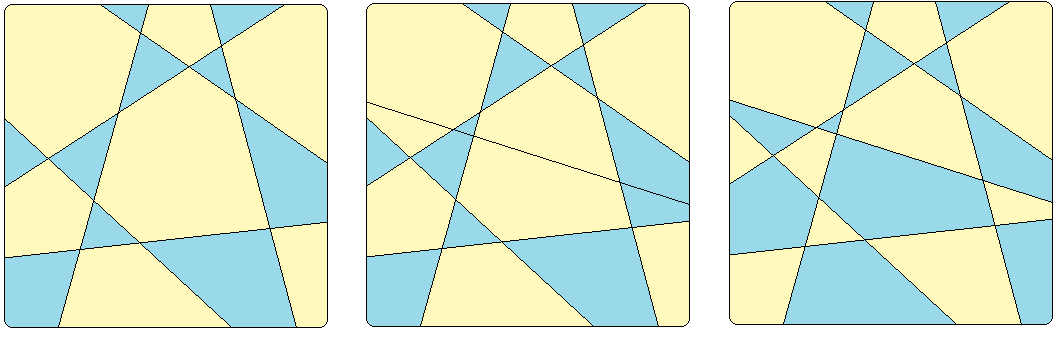
Задача 1. Раскрасьте эту карту из 100 стран в четыре цвета так, чтобы соседние страны были окрашены в разные цвета.

Решение приведено на рисунке справа.



Задача 2. На плоскости проведено n прямых. Докажите, что такую абстрактную карту можно раскрасить двумя красками так,чтобы любые две области, имеющие общий участок границы, были раскрашены в разные цвета.

Доказательство. Применим метод математической индукции по числу прямых. Очевидно, карту, образованную одной прямой, можно раскрасить в два цвета. Пусть утверждение доказано для n прямых на рисунке слева. Проведем (n +1)-ю прямую на рисунке в центре. В одной полуплоскости этой прямой цвета областей оставим без изменений, а в другой полуплоскости изменим цвет каждой желтой области на голубой, а цвет каждой голубой области на желтый. При этом на рисунке справа получим раскраску, в которой любые две области, имеющие общий участок границы, раскрашены в разные цвета. Утверждение задачи доказано.



Задача 3. На плоскости нарисовано n окружностей. В каждой окружности проведено по хорде так, что хорды двух окружностей имеют между собой самое большое одну общую точку (рис.1). Докажите, что получившуюся карту на рисунке слева всегда можно раскрасить тремя красками так,чтобы любые две области, имеющие общий участок границы, были раскрашены в разные цвета.

Доказательство. Идею доказательства проведем для трёх окружностей с хордами, хотя все рассуждения можно обобщить на случай, когда на плоскости нарисовано n окружностей с хордами. Состоит она в следующем:

первая, малая окружность и её хорда разбивает плоскость на три части. Во всех областях первой части поставим по 0, во всех областях второй части поставим 1, во всех областях третьей части поставим 2 ( рис. 2);

вторая, средняя окружность и её хорда разбивает плоскость на три части. Во всех областях первой части поставим по 0, во всех областях второй части поставим 1, во всех областях третьей части поставим 2 ( рис. 3);

третья, большая окружность и её хорда разбивает плоскость на три части. Во всех областях первой части поставим по 0, во всех областях второй части поставим 1, во всех областях третьей части поставим 2 ( рис. 4).

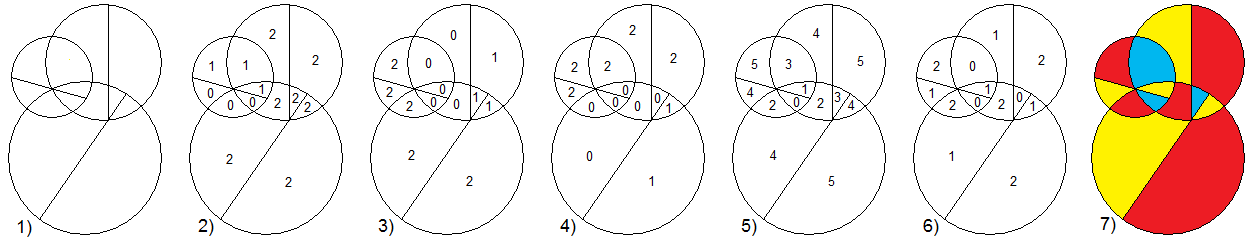
При этом каждой области будет соответствовать три числа, найдем их сумму (рис. 5), и числа каждой области заменим остатком от деления его на 3 (рис. 6).

Области, у которых этот остаток равен 0, закрасим синей краской;

области, у которых этот остаток равен 1, закрасим желтой краской;

области, у которых этот остаток равен 2, закрасим красной краской.

Полученная таким образом раскраска (рис. 7) удовлетворяет условия задачи.



**Заключение**

В заключение хочу отметить следующее: хотя теорема доказана и принята математическим сообществом, но у части математиков её доказательство вызывает определенное недоверие в той его части, где значительную часть рутинных проверок выполнял компьютер.

Сами авторы доказательства сообщают: "Читатель должен разобраться в 50 страницах текста и диаграмм, 85 страницах с почти 2500 дополнительными диаграммами, 400 страницами микрофишей, содержащими еще диаграммы, а также тысячи отдельных проверок утверждений, сделанных в 24 леммах основного текста. Вдобавок читатель узнает, что проверка некоторых фактов потребовала 1200 часов компьютерного времени, а при проверке вручную потребовалось бы гораздо больше. Статьи устрашающи по стилю и длине, и немногие математики прочли их сколько-нибудь подробно".

Вот что пишет по этому поводу А. В. Самохин из Московского государственного технического университета гражданской авиации: «Говоря прямо, компьютерную часть доказательства невозможно проверить вручную, а традиционная часть доказательства длинна и сложна настолько, что ее никто целиком и не проверял. Между тем доказательство, не поддающееся проверке, есть нонсенс. Согласиться с подобным доказательством означает примерно тоже, что просто поверить авторам».

А вот математик Ф. Дэвис, впервые услышав о решении проблемы четырех красок, отреагировал так: «Моей первой реакцией было: "Потрясающе! Как им удалось решить эту проблему?". Я ожидал какой-то блестящей новой идеи, красота которой перевернула бы всю мою жизнь. Но когда я услышал в ответ: "Они решили проблему, перебрав тысячи случаев и пропустив все варианты один за другим через компьютер", – меня охватило глубочайшее уныние».

Несмотря на все разногласия среди математиков решение проблемы четырёх красок есть первая математическая теорема, при доказательстве которой впервые был использован компьютер, и является примером неклассического доказательства в современной математике.

«Так решена ли проблема четырех красок?», – каждый вправе задать себе такой вопрос. Я думаю, правильный ответ на него даст время, нужно подождать.

**Литература**

1. Л. Беве, Любая карта на плоскости может быть раскрашена в четыре цвета, Квант, 1977 г., №1;  
  
2. Е. Дынкин, В.Успенский, Математические беседы, М и Л, ГИТТЛ, 1952 г.;  
  
3. А. А. Зыков. Основы теории графов. — М.: Вузовская книга, 2000. — С. 367—386.  
  
4. Журнал //Наука и жизнь. – 1979. - № 3. – С.80  
  
5. Методы четырехцветной раскраски вершин плоских графов. — М.: КомКнига, 2000. — 48 с. — 2005 экз. — ISBN 5-484-00127-7  
  
6. Р.Курант, Г.Роббинс Что такое математика?  
  
7. Самохин А. В. Проблема четырех красок: неоконченная история доказательства //СОЖ. — 2000. — № 7. — С. 91—96.  
  
8. Родионов В. В. Методы четырехцветной раскраски вершин плоских графов. — М.: КомКнига, 2000. — 48 с. — 2005 экз. — ISBN 5-484-00127-7  
  
9. Рингель Г. Теорема о раскраске карт / Перевод с английского В. Б. Алексеева. — М.: Мир, 1977. — 256 с. — книга с доказательством проблемы для всех поверхностей, кроме плоскости и сферы  
  
10. И. Шарыгин, Л. Ерганжиева, Наглядная геометрия, 5-6 кл., М, Дрофа, 2007 г.