Квадратные уравнения в курсе математики основной школы.

Савичева Галина Ивановна,

учитель математики

МБОУ «ВОШ№3 г. Пугачева

Саратовской области»

Уравнения в школьном курсе алгебры занимают одно из ведущих мест: они имеют не только важное теоретическое значение, но и служат для практических целей. Подавляющее большинство задач о пространственных формах и количественных отношениях реального мира сводится к решению различных видов урав­нений. Овладевая способами их решения, мы находим ответы на различные вопросы из науки и техники (транспорт, сельское хозяйство, промышленность, связь и т. д.).

Решение уравнений является одним из наиболее трудных вопросов, так как чтобы правильно решить уравнение нужно знать:

- большое количество формул;

- какие способы решения уравнений в каких случаях целесообразно применить;

- проводить тождественные преобразования входящих в него выражений;

- безошибочно вычислять.

Определение.***Уравнение*** – это равенство с одной или несколькими переменными (***неизвестными***).

Определение. Значения неизвестных, при которых данное уравнение обращается в тождество, называются ***корнями уравнения***.

Определение:Процедура нахождения *всех* корней уравнения называется  ***решением***уравнения.

*Решить уравнение – значит найти все его корни* *или доказать, что их нет.*

Уравнения учащиеся учатся решать в начальных классах. В пятых и шестых классах учащиеся решают различные линейные уравнения, решают задачи на составление линейных уравнений.

Любой выпускник средней школы может сказать, что квадратные уравнения являются основным фундаментом алгебры. Учащиеся решают тригонометрические уравнения, показательные уравнения, логарифмические уравнения. большая часть задач решается с помощью квадратного уравнения.

Определение: Квадратным уравнением называют уравнение вида ax2 + bx +c =0, x –переменная, a, b, c –некоторые числа, причём a 0.

Числа a, b, и c называют коэффициентами квадратного уравнения. число a называют первым или старшим коэффициентом, число b – вторым коэффициентом, число c – свободным членом.

Если в квадратном уравнении ax2 + bx +c =0 хотя бы один из коэффициентов b или c равен нулю, то такие уравнения называют неполным квадратным уравнением.

Существует три вида неполных квадратных уравнений:

1. При b=c=0 имеем ax2=0;
2. При b=0 и c0 имеем ax2+с=0;
3. При c=0 и b0 имеем ax2+bx=0.

Решим эти уравнения:1. ax2=0, х=0, единственный корень.

2. ax2+с=0, х2= -, x = . Уравнение имеет два корня, если - ˃0. Если - ˂0, то уравнение корней не имеет. По условию с и а не равны 0, поэтому мы рассматриваем строгие неравенства.

3. ax2+bx=0, x(ax+b)=0. Произведение двух множителей равно 0, если хотя бы один из множителей равен нулю. Получим х=0 или аx+b=0, т.е. x= - . Уравнение имеет два корня: х1=0 и х2= -.

Примеры:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| b=c=0 | b=0 и c0 | c=0 и b0 |
| Пример 1  2х2= 0,  х2= 0,  х=0.  Ответ: 0.  Пример 2  3х2 +(х-3)2 =-6х +9,  3х2 +х2-6х+9 = -6х+9,  3х2 +х2-6х+9 +6х-9=0,  4х2=0,  х2=0,  х=0.  Ответ: 0. | Пример 1  х2 -25=0,  х2=25,  х= или х=-  х=5. х= -5.  Ответ: -5, 5.  Пример 2  х2-48=0, умножим обе части уравнения на , получим х2-36 =0,  х= или х=-  х=6 х= -6.  Ответ: -6, 6. | Пример 1  2х2 -4х=0,  2х(х-2)=0,  Произведение равно 0, если хотя бы один из множителей равен 0.  2х=0 или х-2=0  х=0 х=2.  Ответ: 0, 2.  Пример 2  9х2-9х+4=7х2-х+4,  9х2-9х+4-7х2+х-4=0,  2х2-8х=0,  2х(х-4)=0,  2х=0 или х-4=0  х=0 х=4.  Ответ: 0, 4. |

При решение уравнения вида х2 -25=0, учащиеся чаще всего делают ошибки. Забывают про отрицательный корень и теряют один корень. После изучения темы: «Формулы сокращенного умножения», я рекомендую учащимся применять формулу разности квадратов и решать уравнение следующим образом: х2-52=0, (х-5)(х+5)=0, применяя свойство о том, что произведение равно нулю, если хотя бы один из множителей равен нулю, получим х=-5 или х=5. Ответ: -5, 5.

Решая уравнения, применяя формулу разности квадратов, учащиеся получают два корня. Ошибки могут быть только вычислительного характера.

Далее учащимся предлагается решить уравнение путём выделения квадрата двучлена. Пример:

х2-6х +8=0, ( х2-2х·3+32)-32+8=0, (х-3)2-1=0, (х-3)2=1,

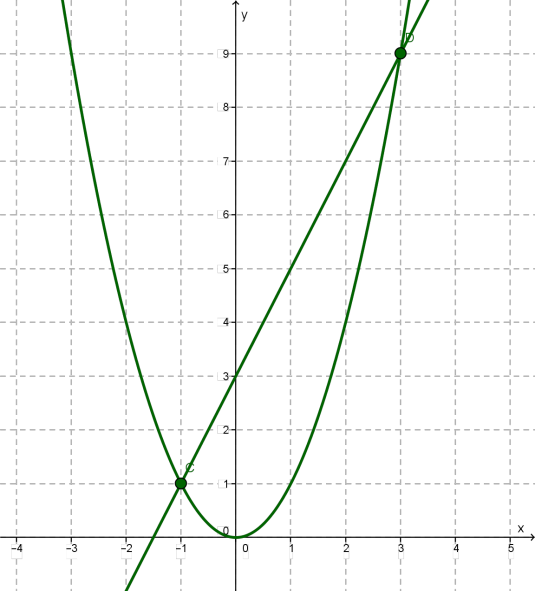
х -3=-1 или х-3=1,

х=2 х=4.

Ответ: 2, 4.

Способ решения квадратного уравнения путем выделения квадрата двучлена не очень удобный: 1) не очень просто бывает выделить квадрат двучлена, ход решения оказывается трудным и очень объёмным; 2) вычисление корней уравнения оказывается трудной задачей.

Еще один из способов решение квадратных является графический способ. Он заключается в следующем: уравнение ax2 + bx +c =0 перепишем в виде ax2 =- bx –c, далее построим графики функций у = ах2 и у = -bx-c в одной системе координат. Находим абсциссы точек пересечения графиков, они и являются решением данного уравнения. Пример: Решим уравнение х2-2х-3=0. Перепишем уравнение в виде х2=2х+3 и построим в одной системе координат графики функций у = х2 и у=2х+3.



Из рисунка видно, что графики функций пересекаются в точках с абсциссами -1 и 2. Корнями уравнения являются -1 и 2.

Ответ: -1, 2.

Корнями квадратного уравнения могут быть обыкновенные или десятичные дроби или большие числа, найти которые по графику неудобно, а иногда и не возможно. Нужен способ, с помощью которого можно найти любое решение уравнения. Рассмотрим его.

Имеем уравнение ax2 + bx +c =0, причем все его числовые коэффициенты отличны от нуля. Умножим обе части уравнения на 4а, получим уравнение, равносильное данному: 4а2х2+ 4аbx +4ac=0. Выделим в левой части уравнения квадрат двучлена: 4а2х2+ 4аbx +b2-b2+4ac=0; (2ах +b)2= b2-4ac.

Существование корней уравнения и их количество зависит от значении выражения b2-4ac. Это значение называют дискриминантом квадратного уравнения и обозначают буквой D. Возможны три случая: D=0, D˂0, D˃0.

1. D˂0 уравнение корней не имеет т.к. выражение (2ах +b)2 неотрицательно.
2. D=0 уравнение имеет один корень т.к. (2ах +b)2=0; 2ах +b=0; х= -.
3. D˃0 уравнение имеет два корня х = .

Пример 1. Решите уравнение 2х2+5х-7=0. Если уравнение имеет более одного корня в ответе запишите больший из них.

Числовые коэффициенты а=2, b=5, с=-7,

D=52-4∙2∙(-7)=25+56=81, 81˃0, уравнение имеет два корня. x1= = = -3,5 x2= = =1

Большим из корней является 1. Ответ: 1

Если второй коэффициент чётное число, то корни можно вычислить по формулам: D1= ()2-ac, x= .

Квадратное уравнение можно решить с помощью теоремы Виета х1 +х2= -, x1∙ x2=. С помощью теоремы Виета проще решать приведенные квадратные уравнения, т.е. если а=1.

Следствие из теоремы Виета: Если в квадратном уравнении ax2 + bx +c =0, a +b +c =0, то

х1=1 х2=. Если в квадратном уравнении a -b +c =0, то х1=-1 х2= -.

Примеры решения уравнений:

1.Задание №21 математика ОГЭ (№338086)

Решите уравнение х2-2х +=+8.

Решение.

Найдем ОДЗ. По определению квадратного корня 3-х0, х3

Перепишем уравнение в виде х2-2х +- - 8=0, получим уравнение х2 -2х-8=0 По теореме, обратной теореме Виета х1+х2=2 и х1∙х2=-8, следует х1=4 х2= -2.

х1=4 не удовлетворяет условию х3. Решением является -2.

Ответ: -2

2. Задание №21 математика ОГЭ (№338757) Рассмотрим пример уравнения, сводящегося к квадратному.

Решите уравнение - -6=0

Решение

Обозначим =t, получим уравнение t2 –t-6=0. По теореме, обратной теореме Виета имеем t1+t2=1, t1∙t2= -6 отсюда t1 =3 t2= -2. Вернёмся к замене переменной 1) =3, 1= 3(х-2), 1=3х-6, 3х= 7, х =, 2) =-2, 1= -2(х-2), 1= -2х+4, 2х=3, х=1,5.

Ответ: 1,5 , .

3. Задание №21 математика ОГЭ (№311587) Решите уравнение х4-5х2+4=0. Уравнение такого вида называется биквадратным.

Решение.

Обозначим х2=t, причем t0, получим уравнение t2-5t +4=0,

D=(-5)2 -4∙1∙4=25-16=9, 90 уравнение имеет два корня t1= =1, t2 ==4. Вернемся к замене переменного. 1.х2=1, х=-1 или х=1; 2. х2=4, х=-2 или х=2.

Ответ: -2, -1, 1, 2.

Квадратные уравнения применяются при решении дробно – рациональных уравнений, при решении задач с помощью уравнений.

В данной работе были рассмотрены различные способы решения квадратных уравнений. Квадратные уравнения используются при изучении многих тем основной школы, но они широко применяются при изучении различных тем старшей школы.

Литература:

 Алгебра/Учебник: 8 класс :учебник для учащихся общеобразовательных организаций / А.Г.Мерзляк, В.Б.Полонский, М.С.Якир. – М. Вентана-Граф. 2019.

 Алгебра/Учебник: 9 класс :учебник для учащихся общеобразовательных организаций / А.Г.Мерзляк, В.Б.Полонский, М.С.Якир. – М. Вентана-Граф. 2019

ОГЭ 3000 задач с ответами. Все задания части 1/ под редакцией И.В. Ященко. – М. : Издательство «Экзамен», 2018

Черкасов О.Ю., Якушев А.Г. Математика: интенсивный курс подготовки к экзамену – М.: Рольф, 1997

<https://oge.sdamgia.ru/>

<https://nsportal.ru/>