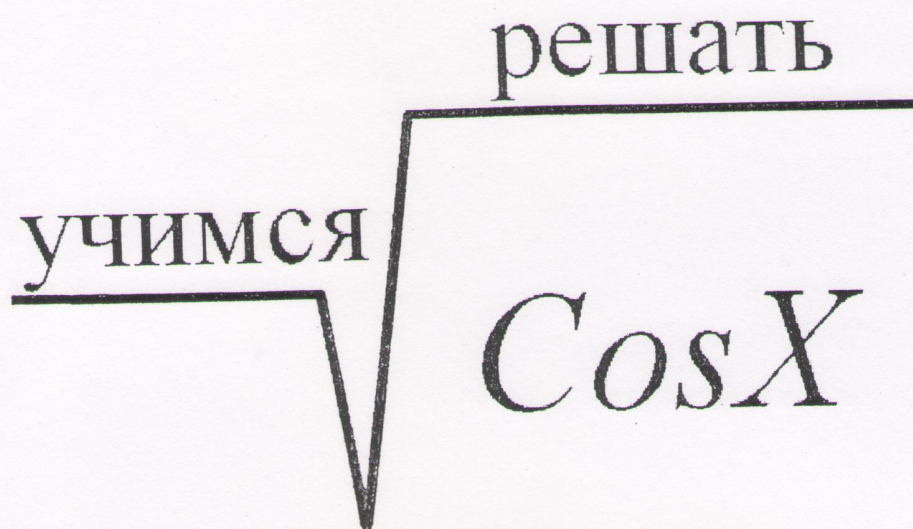


Ю.А.Павлов

**Тригонометрические уравнения,
их решение и использование в задачах
по алгебре и геометрии.**
Пособие – самоучитель.



Свердловск, 1999

Предисловие.

Это пособие предназначено для тех, кто хочет научиться решать тригонометрические уравнения и уметь применять их при решении задач, а также для лиц, самостоятельно готовящихся к конкурсным экзаменам по математике. Для успешного решения тригонометрических уравнений и задач, связанных с ними, необходимо уверенное владение многочисленными формулами и соотношениями тригонометрии. Однако, хорошее знание формул еще не гарантирует умения решать тригонометрические уравнения. Поэтому данное пособие как раз ставит своей целью научить читателя решать тригонометрические уравнения и применять их при решении задач по алгебре и геометрии. Эту цель автор стремится достичь путем рассмотрения большого количества видов тригонометрических уравнения и способов их решения. Своей классификацией тригонометрических уравнений, глубиной, разнообразием и методикой изложения данное пособие существенно отличается от других подобных пособий и, несомненно, будет полезным тому, кто хочет овладеть широкими навыками решения тригонометрических уравнений.

В пособии рассматриваются 26 видов тригонометрических уравнений - от простейших до уравнений с параметром - и способы их решения. Способ решения каждого вида рассматривается на достаточном количестве примеров с подробными пояснениями. Многие задания сформулированы так, что они заставляют выполнить не только прямое решение уравнения, но и осознать это решение и проанализировать найденный ответ, сделать конкретные выводы и провести необходимые исследования полученного результата. Для отработки навыков решения уравнений данного вида проводятся примеры для самостоятельного решения с ответами и некоторыми рекомендациями. При этом широко представлены тригонометрические уравнения с начальным условием. Поэтому автор в теоретической части раздела 1 первой главы подробно рассматривает геометрическую интерпретацию множества решений каждого простейшего уравнения с помощью единичной окружности. Интересным и несомненно полезным является раздел, в котором представлены алгебраические и геометрические задачи, решаемые с помощью тригонометрических уравнений.

В конце пособия, в третьей главе, выделен дополнительный раздел тригонометрических уравнений, взятых только со вступительных экзаменов, для самостоятельного решения. Здесь уравнения достаточно разнообразны как по идеям

решения, так и по сложности. При этом в блоке А данного раздела к каждому уравнению указан номер вида, к которому может быть отнесено это уравнение, а в блоке Б читателю требуется определить самому этот вид. Такой подход должен способствовать развитию и укреплению навыков самостоятельного решения тригонометрических уравнений, помочь достичь поставленную пособием цель.

Данное издание можно назвать контрольно-обучающим пособием или пособием-самоучителем. Почему ? Структура пособия и методика изложения материала позволяют не только самостоятельно учиться решать тригонометрические уравнения, но и контролировать этот процесс, самому оценивать свои успехи и результаты.

Пособие, которое Вы начинаете изучать, явилось результатом многолетней работы его автора в математических классах, в классах с углубленным изучением математики, на подготовительных курсах, в профильной школе, в экономическом колледже. Некоторые понятия, определения и классификация автором приведены самим.

В книге собрано около 400 задач по данной теме. Из них 120 задач сопровождается подробными решениями, все остальные задачи снабжены ответами и указаниями.

Пособие предназначено для учителей средних школ, преподавателей подготовительных курсов, учащихся старших классов, абитуриентов.

Автор.

Глава I

***Тригонометрические
уравнения, их виды и
способы решения.***

Раздел 1.

Простейшие тригонометрические уравнения и их решение (краткая теория и задачи)

К простейшим тригонометрическим уравнениям относятся уравнения вида

$$\sin X = a, \cos X = a, \operatorname{tg} X = a, \operatorname{ctg} X = a \quad (*)$$

Всякое тригонометрическое уравнение $(*)$ выражает задачу об отыскании всех его корней (или решений). Поэтому напомним, что такое корень уравнения и что значит решить уравнение.

Корнем (решением) уравнения называется то значение неизвестной переменной X , при котором это уравнение обращается в верное числовое неравенство.

Например, равенство $\cos X = \frac{1}{2}$ является одним из простейших тригонометрических уравнений, а все значения переменной X , выраженные формулой

$$X = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \text{ (т.е. } k = 0; \pm 1; \pm 2; \dots)$$

будут являться корнями этого уравнения.

Действительно, при $X = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k$ левая часть этого уравнения будет равна

$\cos(\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k) = \cos(\pm \frac{\pi}{3}) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ (здесь была использована периодичность и четность косинуса). В результате получаем верное числовое равенство.

Поэтому, решить тригонометрическое уравнение $(*)$, как и всякое другое уравнение, - это значит найти все его корни или установить, что их нет. Так, уравнение $\sin X = 2$, корней не имеет, т.к. $-1 \leq \sin X \leq 1$.

Рассмотрим каждое простейшее тригонометрическое уравнение вида $(*)$

1. Уравнение $\sin X = a$, где $-1 \leq a \leq 1$

Решить данное уравнение - это значит найти все такие значения X , при которых $\sin X = a$.

Напомним, что $\sin X$ - это ордината точки единичной окружности, полученной поворотом точки $A(1; 0)$ вокруг начала координат на угол X . Ординату равную a , имеют две точки окружности M и N (рис. 1).

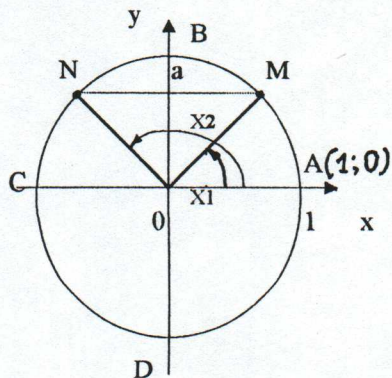


Рис. 1.

Первая точка M получается из точки $A(1; 0)$ поворотом на угол X_1 , а также на углы

$$X = X_1 + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Вторая точка N получается из точки A (1; 0) поворотом на угол X_2 , а также на углы $X = X_2 + 2\pi k$, т.е. на углы $X = \pi - X_1 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ ($X_2 = \pi - X_1$).

Итак, все корни уравнения $\sin X = a$ можно найти по формулам

$$X = X_1 + 2\pi k, \quad X = -X_1 + \pi(2k + 1), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Эти формулы объединяются в одну формулу: $X = (-1)^n X_1 + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$.

Действительно, если n - четное число, т.е. $n = 2k$,

то из этой формулы получаем $X = X_1 + 2\pi k$, а если n - нечетное число, т.е. $n = 2k + 1$,

то из той же формулы получаем $X = -X_1 + \pi(2k + 1) = \pi - X_1 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Определим теперь число X_1 , зная, что $\sin X_1 = a$.

Из сказанного выше следует, что уравнение $\sin X = a$ имеет бесконечное множество корней. На отрезке же $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ это уравнение имеет только один корень X_1 .

При этом, если $0 \leq a \leq 1$, то корень заключен в промежутке $[0; \frac{\pi}{2}]$;

если $-1 \leq a < 0$, то в промежутке $[-\frac{\pi}{2}; 0]$.

Этот корень называют арксинусом числа a и обозначают $\arcsin a$. (рис. 2, 3)

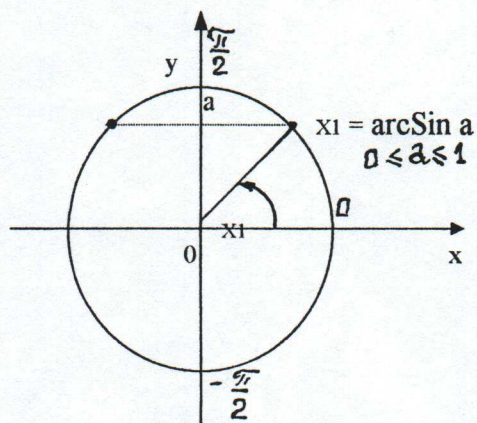


Рис. 2.

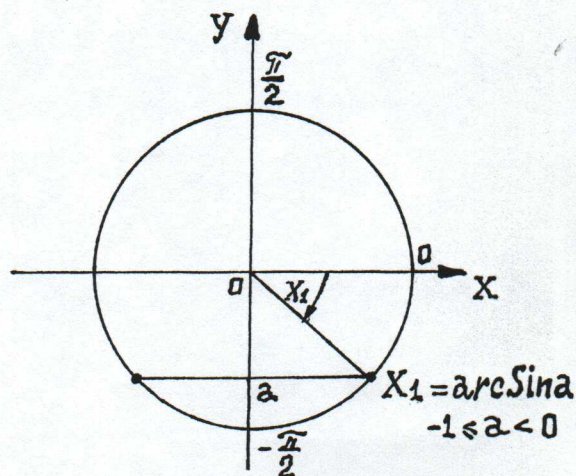


Рис. 3.

Таким образом, арксинусом числа a ($-1 \leq a \leq 1$) называется число X , принадлежащее отрезку $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, синус которого равен числу a , т.е.

$$\underline{\arcsin a = X, \text{ если } X \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \text{ и } \sin X = a.}$$

Следовательно, в нашем случае число $X_1 = \arcsin a$ и поэтому корни уравнения $\sin X = a$, где $-1 \leq a \leq 1$, находятся по формуле

$$X = (-1)^n \arcsin a + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \quad \Phi.1.1.$$

Геометрическая интерпретация множества этих корней представлена на рисунках 4 и 5

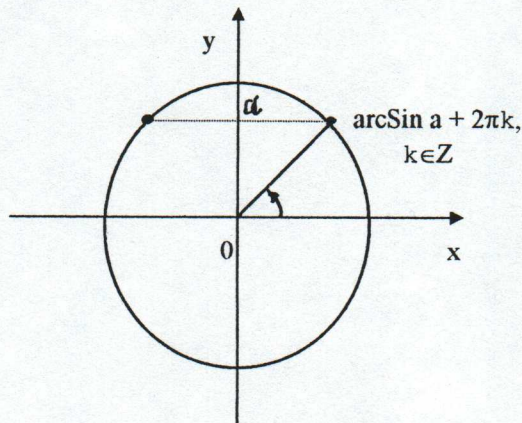


Рис 4.

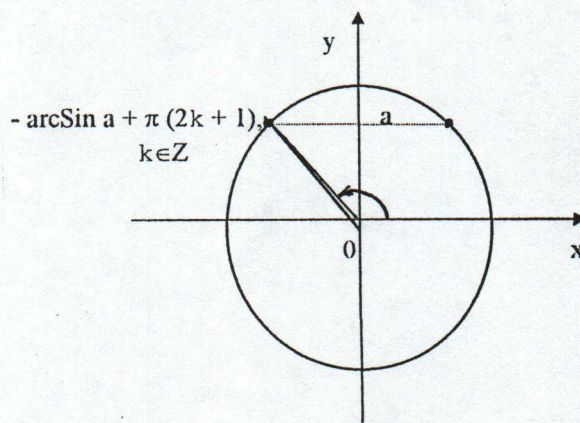


Рис5.

При четном $n(n=2k)$ из формулы $\Phi.1.1.$ получается серия корней, расположенных на правой полуокружности (Рис.4); при нечетном $n(n=2k+1)$ - серия корней, расположенных на левой полуокружности (Рис.5).

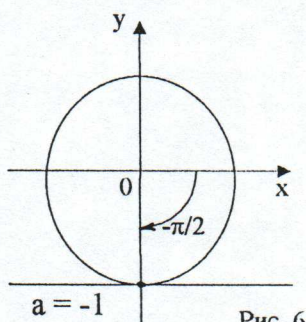
В частных случаях при $a = -1$, $a = 0$ и $a = 1$ корни уравнения $\sin X = a$ находятся по более простым формулам:

$$\sin X = -1 \quad X = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\sin X = 0 \quad X = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

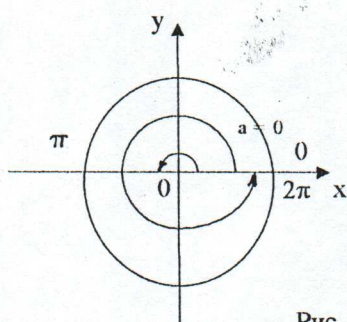
$$\sin X = 1 \quad X = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Геометрическая интерпретация множества решений этих простейших уравнений представлена соответственно на рисунках 6, 7, 8.



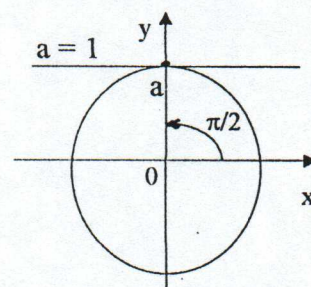
$a = -1$

Рис. 6



$a = 0$

Рис. 7



$a = 1$

Рис. 8

При решении уравнения $\sin X = a$ будем использовать такое соотношение

$$(*) \quad \boxed{\arcsin(-a) = -\arcsin a}, \quad \text{где } 0 < a < 1, \text{ т.е. } -1 < a < 0$$

Это соотношение позволяет находить значение арксинуса отрицательного числа через значение арксинуса положительного числа. Докажем его.

По определению арксинуса числа имеем

$$\begin{aligned} \sin(\arcsin(-a)) &= -a \text{ и} \\ \sin(-\arcsin a) &= -\sin(\arcsin a) = -a, \\ \text{т.е. } \sin(\arcsin(-a)) &= \sin(-\arcsin a) \end{aligned}$$

$$\text{Так как числа } -\frac{\pi}{2} \leq \arcsin(-a) \leq \frac{\pi}{2} \text{ и } -\frac{\pi}{2} \leq -\arcsin a \leq \frac{\pi}{2}$$

и синусы их равны, то сами эти числа так же равны, т.е. $\arcsin(-a) = -\arcsin a$

Соотношение доказано.

Если при решении заданного тригонометрического уравнения требуется из множества его решений отобрать те, для которых $\sin X > 0$, то следует эти решения отбирать по рис.9.

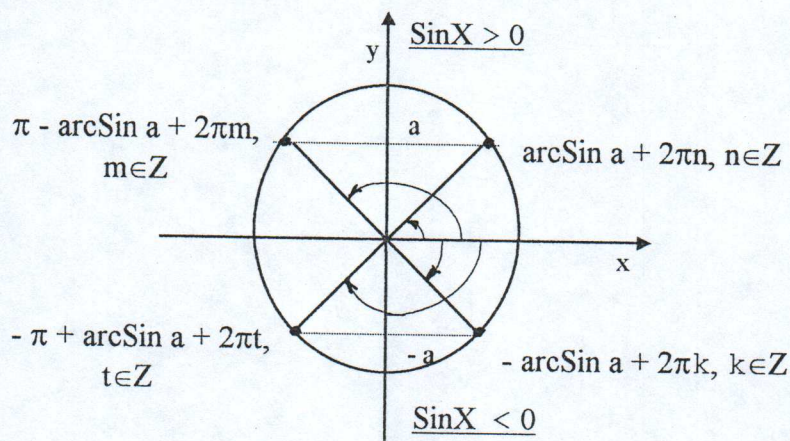
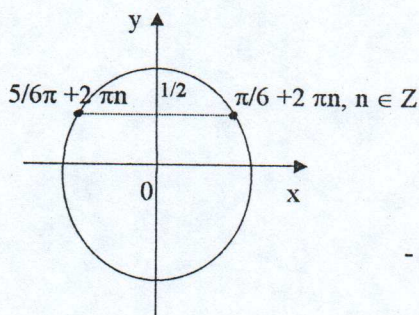


Рис. 9

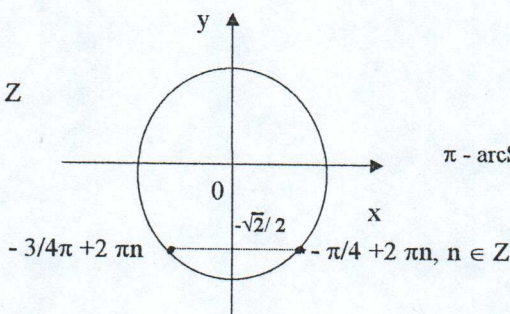
Для начала рассмотрим два простых, но полезных примера.

Пример 1.1. На единичной окружности изобразить решения каждого уравнения:

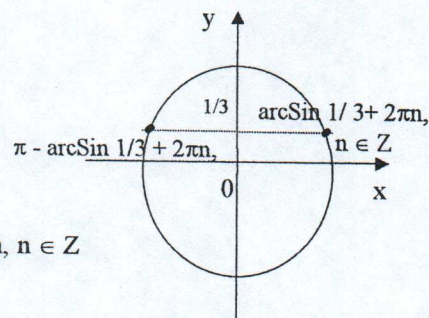
а) $\sin X = 1/2$; б) $\sin X = -\sqrt{2}/2$; в) $\sin X = 1/3$.



а)



б)



в)

$$X = (-1)^n \pi/6 + \pi n, n \in \mathbb{Z} \quad X = (-1)^{n+1} \pi/4 + \pi n, n \in \mathbb{Z} \quad X = (-1)^n \arcsin 1/3 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Пример 1.2. Найти все корни уравнения $2 \cos 3(\pi/6 + X) = 1$, для которых $\sin X < 0$.

Решение. Решение данной задачи разбивается на два этапа. На первом этапе решим данное уравнение и найдем множество всех его корней; на втором - выберем из найденного множества те решения, для которых синус отрицателен.

Первый этап. Сделаем очевидное преобразование $\cos(\pi/2 + 3x) = 1/2$ и применим формулу приведения для косинуса $-\sin 3x = 1/2$, $\sin 3x = -1/2$. Воспользуемся формулой **Ф.1.1.** и соотношением (**), получим:

$$3x = (-1)^n \arcsin(-1/2) + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$3x = (-1)^n (-\arcsin 1/2) + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$3x = (-1)^{n+1} \pi/6 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = (-1)^{n+1} \pi/18 + \pi/3n, n \in \mathbb{Z}$$

Второй этап. Из полученного множества решений отберем те, для которых $\sin X < 0$. Для

этого полученное множество разобьем на два подмножества.

При четном $n = 2k$ ($k \in \mathbb{Z}$) $X_1 = -\frac{\pi}{18} + \frac{2}{3}\pi k, (k \in \mathbb{Z})$

При нечетном $n = 2k+1$ ($k \in \mathbb{Z}$) $X_2 = \frac{\pi}{18} + \frac{\pi}{3}(2k+1) = \frac{\pi}{18} + \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}\pi k = \frac{7}{18}\pi + \frac{2}{3}\pi k, (k \in \mathbb{Z})$

Нанесем эти решения на единичную окружность (Рис.10), обозначив $X_1^{(k)}$ и $X_2^{(k)}$ - корни, полученные из серий X_1 и X_2 при соответствующих целых значениях k .

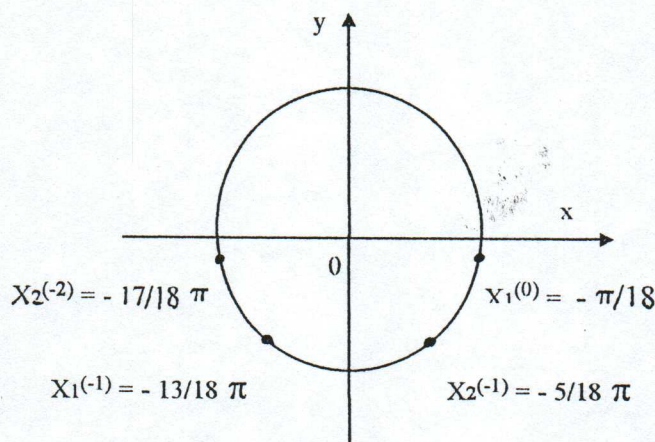


Рис. 10.

Из рисунка видим, что искомыми решениями будет объединение четырех множеств.

Ответ $X = -\frac{17}{18}\pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

$X = -\frac{13}{18}\pi + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$

$X = -\frac{5}{18}\pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

$X = -\frac{\pi}{18} + 2\pi t, t \in \mathbb{Z}$

2. Рассмотрим далее уравнение $\cos X = a$, где $-1 \leq a \leq 1$.

Решить это уравнение - это значит найти все такие значения X , при которых $\cos X = a$.

Напомним, что $\cos X$ - это абсцисса точки единичной окружности, полученной поворотом точки $A(1;0)$ вокруг начала координат на угол X . Абсциссу, равную a , имеют две точки окружности M и N (Рис.11.).

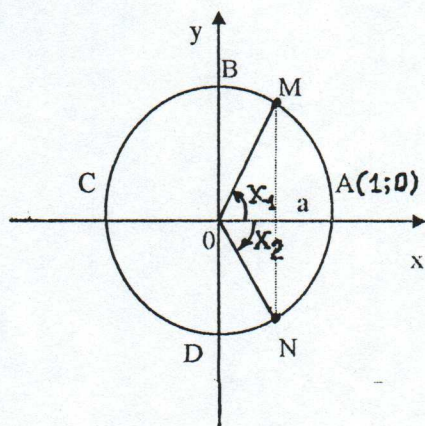


Рис.11.

Первая точка M получается из точки $A(1;0)$ поворотом на угол X_1 ,

а также на углы $X = X_1 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Вторая точка N получается из точки $A(1;0)$ поворотом на угол X_2 ,

а также на углы $X = X_2 + 2\pi k$,

т.е. на углы $X = -X_1 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

($X_2 = -X_1$).

Итак, все корни уравнения можно найти по формулам:

$$X = X_1 + 2\pi k, \quad X = -X_1 + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Эти формулы легко объединяются в одну формулу:

$$X = \pm X_1 + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Определим теперь число X_1 , зная, что $\cos X_1 = a$.

Из сказанного выше следует, что уравнение $\cos X = a$ имеет бесконечное множество корней. На отрезке же $[0; \pi]$ это уравнение имеет только один корень X_1 . При этом, если $0 \leq a \leq 1$, то корень заключен в промежутке $[0; \frac{\pi}{2}]$; если, $-1 \leq a < 0$, то в промежутке $(\frac{\pi}{2}; \pi]$. Этот корень называется арккосинусом числа a и обозначается $\arccos a$ (Рис 12.).

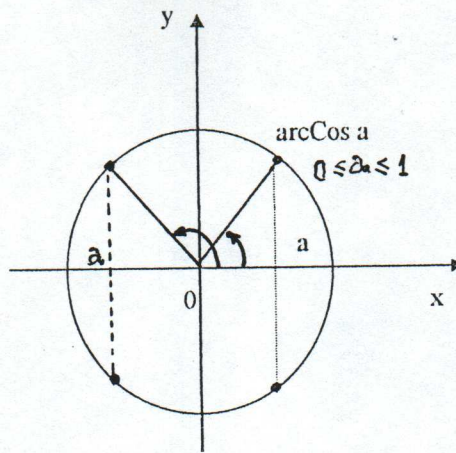


Рис.12.

Таким образом, арккосинусом числа a ($-1 \leq a \leq 1$) называется число X , принадлежащее отрезку $[0; \pi]$, косинус которого равен числу a , т.е.

$$\text{arcCos } a = X, \text{ если } X \in [0; \pi] \text{ и } \text{Cos } X = a$$

Следовательно, в нашем случае число $X_1 = \text{arcCos } a$ и поэтому корни уравнения $\text{Cos } X = a$, где $-1 \leq a \leq 1$, находятся по формуле:

$$X = \pm \text{arcCos } a + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Ф.1.2.

Геометрическая интерпретация множества этих корней представлена на рисунке 13.

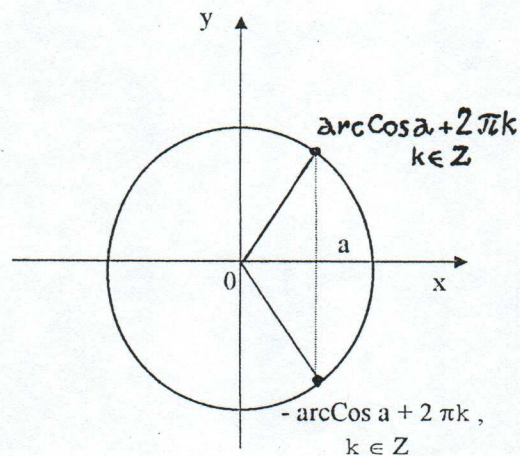


Рис. 13.

В частных случаях при $a = -1$, $a = 0$ и $a = 1$ корни уравнения $\cos X = a$ находятся по более простым формулам:

$$\cos X = -1 \quad X = \pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\cos X = 0 \quad X = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\cos X = 1 \quad X = 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Геометрическая интерпретация множества решений этих простейших уравнений представлена соответственно на рисунках 14, 15, 16.

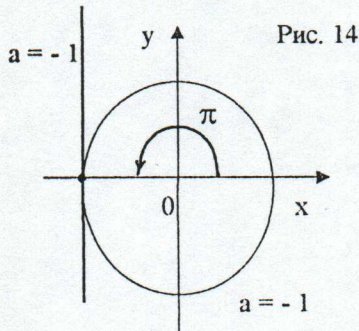


Рис. 14

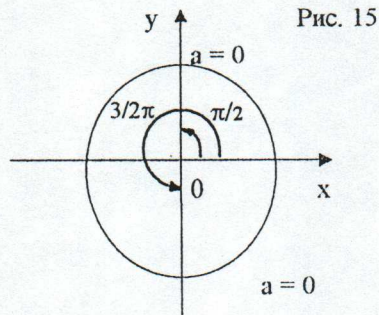


Рис. 15

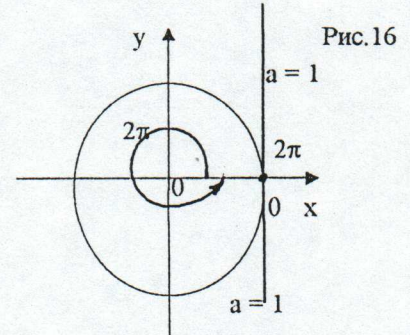


Рис. 16

$$X = \pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$X = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$X = 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

При решении уравнения $\cos X = a$ будем использовать такое соотношение

(***) $\arccos(-a) = \pi - \arccos a$, где $0 < a < 1$, т.е. $-1 < -a < 0$

Это соотношение позволяет находить значение арккосинуса отрицательного числа через значение арккосинуса положительного числа. Докажем его.

По определению арккосинуса числа имеем $\cos(\arccos(-X)) = -X$

$$\cos(\pi - \arccos X) = -\cos(\arccos X) = -X,$$

(по формуле приведения)

$$\text{т.е. } \cos(\arccos(-X)) = \cos(\pi - \arccos X)$$

Так как числа $0 \leq \arccos(-X) \leq \pi$ и $0 \leq \pi - \arccos X \leq \pi$ и косинусы их равны,

то сами эти числа так же равны, т.е. $\arccos(-a) = \pi - \arccos a$. Соотношение доказано.

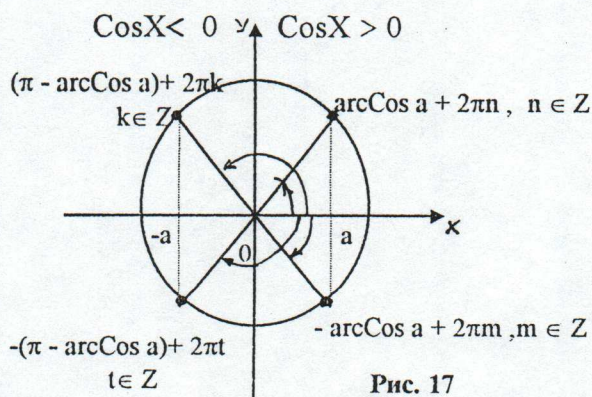


Рис. 17

Если при решении заданного тригонометрического уравнения требуется из множества его решений отобрать те, для которых $\cos X > 0$ или $\cos X < 0$, то следует эти решения отбирать согласно рисунку 17.

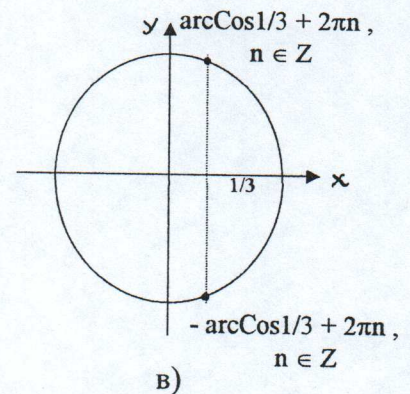
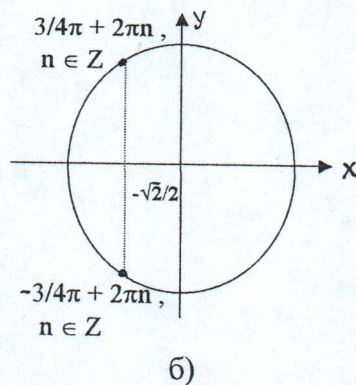
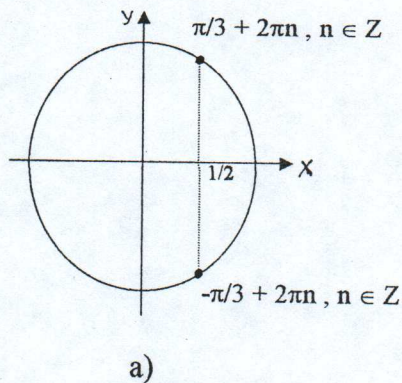
Рассмотрим также две весьма полезные задачи.

Пример 1.3. На единичной окружности изобразить решения каждого уравнения:

а) $\cos X = 1/2$

б) $\cos X = -\sqrt{2}/2$;

в) $\cos X = 1/3$.



Пример 1.4. Найти все решения уравнения $\sin(3\pi/2 - x) = \sqrt{3}/2$, для которых $\sin X > 0$

Решение.

Как и решение примера 1.2, решение данного примера так же состоит из двух этапов.

Первый этап. Найдем множество всех решений данного уравнения, используя сначала формулу приведения, а затем формулу **Ф.1.2.** и соотношение (***)

$$-\cos X = \sqrt{3}/2, \quad \cos X = -\sqrt{3}/2$$

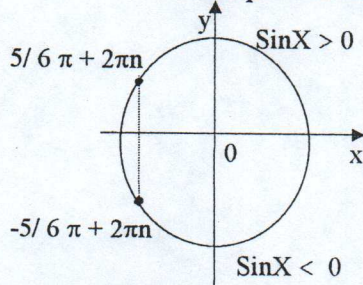
$$X = \pm \arccos(-\sqrt{3}/2) + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$X = \pm (\pi - \arccos \sqrt{3}/2) + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$X = \pm (\pi - \pi/6) + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$X = \pm 5/6 \pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Второй этап. Изобразим множество найденных решений на единичной окружности и выберем из них те, для которых $\sin X > 0$.



Из рисунка 18 видим, что ответом будет множество $X = 5/6 \pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$

Ответ. $5/6 \pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$

Рис. 18

Рассмотрим теперь уравнение $\operatorname{tg} X = a$, где $a \in \mathbb{R}$

Множество решений этого простейшего уравнения находится по формуле

$$X = \operatorname{arctg} a + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \quad \text{Ф.1.3.}$$

В формуле Ф.1.3. определим символ $\operatorname{arctg} a$, который называется арктангенсом числа a . Для этого введем понятие оси тангенсов.

Определение. Прямая, являющаяся касательной к единичной окружности в точке $(1; 0)$, называется осью тангенсов.

Её уравнение $X = 1$ (Рис.19)

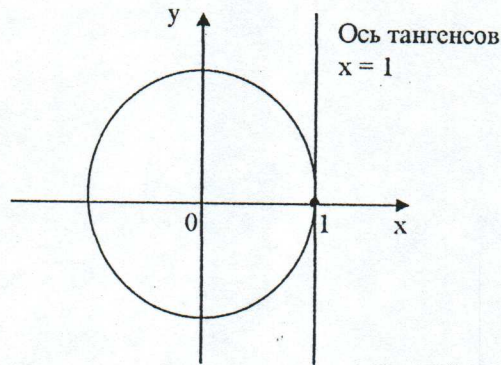


Рис.19.

Кстати, название «тангенс» происходит от латинского «tangens» - касающийся. Определим теперь тангенс числа X следующим образом: $\operatorname{tg} X$ - это ордината точки на оси тангенсов, которая соответствует числу X .

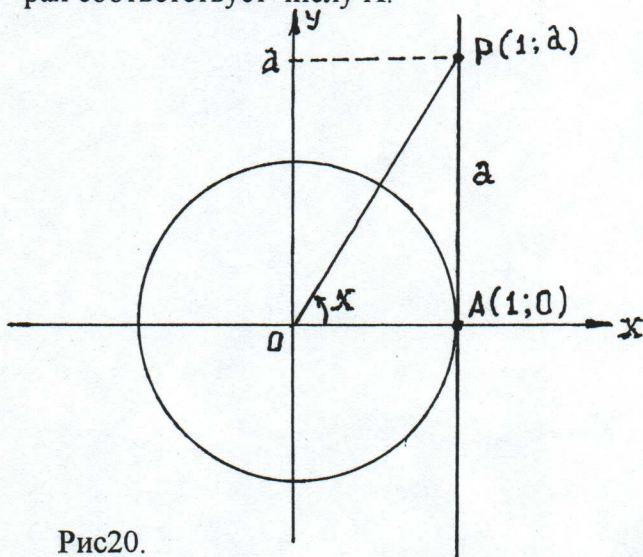


Рис.20.

Действительно, пусть на оси тангенсов выбрана точка $P(1; a)$. Тогда, из прямоугольного треугольника OAP по определению тангенса

$$\operatorname{tg} X = \frac{AP}{OA} = \frac{a}{1} = a \text{ (Рис.20).}$$

Далее, на единичной окружности существуют две точки M и N , которые соответствуют точке $P(1; 0)$ оси тангенсов (Рис.21).

Первая точка M получается из т. $A(1; 0)$ поворотом вокруг начала координат на угол X_1 , а также на углы

$$X = X_1 + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Вторая точка N получается поворотом точки $A(1; 0)$ на угол X_2 , равный $X_1 + \pi$, а также на углы

$$X = X_1 + \pi + 2\pi k = X_1 + \pi(2k+1), \quad k \in \mathbb{Z}$$

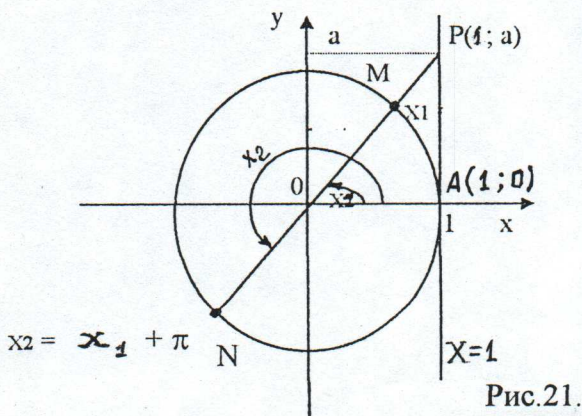


Рис.21.

Таким образом, если нам нужно решить уравнение $\operatorname{tg} X = a$, то все его корни можно найти по формулам $X = X_1 + 2\pi k$, $X = X_1 + \pi(2k+1)$, $k \in \mathbb{Z}$

Эти формулы легко объединяются в одну $X = X_1 + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$

Определим теперь число X_1 .

На интервале $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ уравнение $\operatorname{tg} X = a$ имеет только один корень X_1 . При этом, если $a \geq 0$, то корень заключен в полуинтервале $[0; \frac{\pi}{2})$; если $a < 0$, то в интервале $(-\frac{\pi}{2}; 0)$. Этот корень обозначается символом $\operatorname{arctg} a$ и называется арктангенсом числа a (Рис 22 и 23).

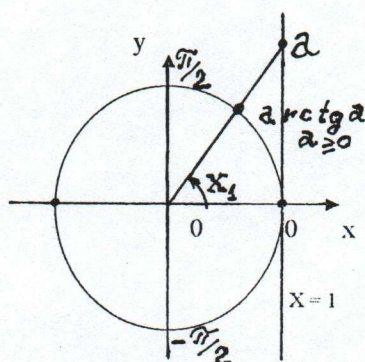


Рис.22.

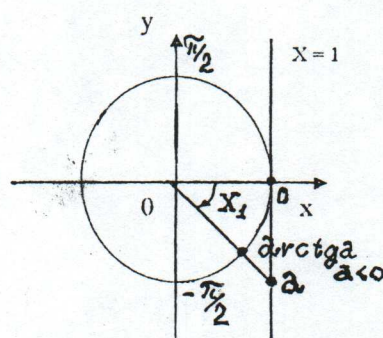


Рис.23.

Арктангенсом числа $a \in \mathbb{R}$ называется такое число $X \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$, тангенс которого равен числу a ,

$$\text{т.е. } \operatorname{arctg} a = X, \text{ если } X \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) \text{ и } \operatorname{tg} X = a$$

Следовательно, в нашем случае $X_1 = \operatorname{arctg} a$ и поэтому корни уравнения $\operatorname{tg} X = a$, $a \in \mathbb{R}$ выражаются формулой **Ф.1.3.**

В частных случаях при $a = -1$, $a = 0$ и $a = 1$ легко усматриваются формулы:

$\operatorname{tg} X = -1$	$X = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{tg} X = 0$	$X = \pi n, n \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{tg} X = 1$	$X = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

Для решения уравнения $\operatorname{ctg} X = a$ при $a \neq 0$ воспользуемся тем фактом, что тогда $\operatorname{tg} X = \frac{1}{a}$ и все решения уравнения $\operatorname{ctg} X = a$ при $a \neq 0$ найдем по формуле

$X = \operatorname{arctg} \frac{1}{a} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$
--

Ф.1.4.

Если:

$$\operatorname{ctg} X = 1, \text{ то } X = \pi/4 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{ctg} X = 0, \text{ то } X = \pi/2 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{ctg} X = -1, \text{ то } X = -\pi/4 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

При решении уравнения $\operatorname{tg} X = a$ будем использовать следующее соотношение:

(****)

$$\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a$$

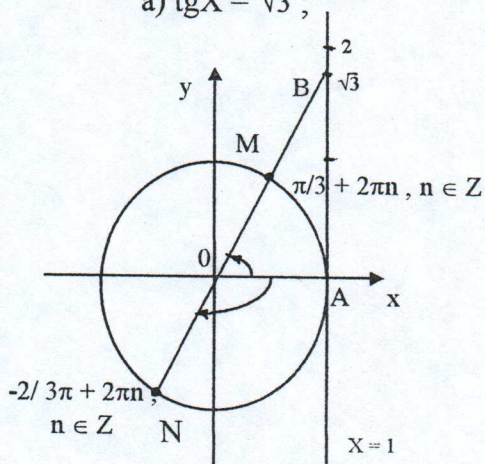
, где $a > 0$

Пример 1.5. На единичной окружности изобразить решение каждого уравнения:

а) $\operatorname{tg} X = \sqrt{3}$;

б) $\operatorname{tg} X = 2$;

в) $\operatorname{tg} X = -1/2$;

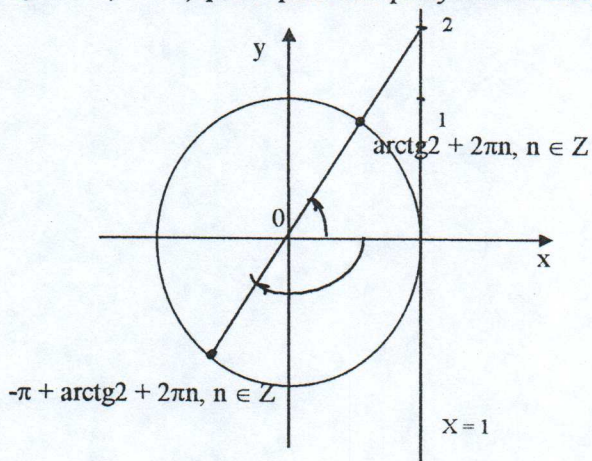


а) 1. Построим ось тангенсов.

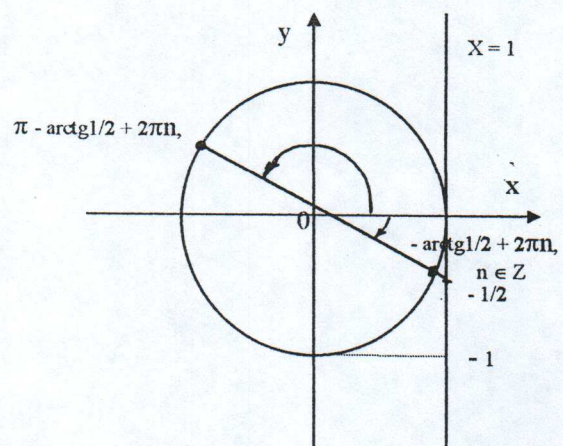
2. На оси тангенсов отложим в положительном направлении отрезок АВ, равный $\sqrt{3}$.

3. Через точку В и начало координат проведем прямую и отметим точки М и N её пересечения с окружностью. Тогда точка М на единичной окружности соответствует числам вида $X = \pi/3 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$, а точка N - числам вида $X = -2/3\pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Случаи б) и в) разберите по рисункам самостоятельно



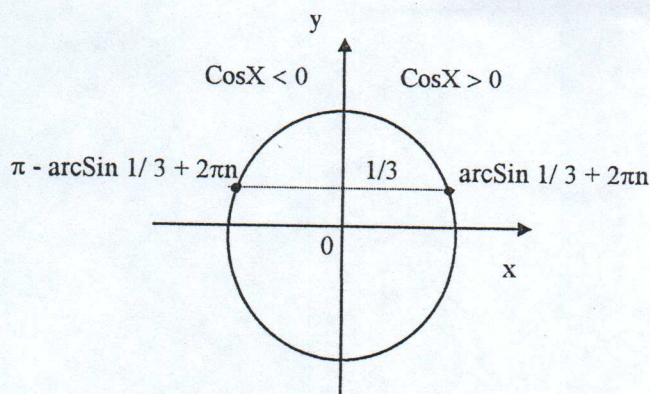
б)



в)

Рассмотрим решение ещё нескольких несложных тригонометрических уравнений, обращая при этом внимание на начальные условия.

Пример 1.6. Решить систему
$$\begin{cases} \sin X = 1/3 \\ \cos X < 0 \end{cases}$$



Решение.

Для решения данной системы совсем не обязательно находить все решения уравнения

$\sin X = 1/3$. Достаточно сразу с помощью единичной окружности определить то множество значений X , для которых $\cos X < 0$. Из рисунка сразу же находим решение системы.

Ответ.

$$X = -\arcsin 1/3 + \pi(2k+1), k \in \mathbb{Z}$$

Пример 1.7. Найти все решения уравнения $\sin^2 3(\pi/6 + x) = 1$, лежащие на интервале $(-\pi; 3/2\pi)$

Решение.

Первый этап. Найдем множество всех корней данного уравнения. Запишем уравнение в виде

$$\sin^2(\pi/2 + 3x) = 1 \text{ и применим формулу приведения для синуса } \cos^2 3x = 1$$

Последнее уравнение равносильно совокупности двух уравнений

$$\cos 3x = 1 \text{ или } \cos 3x = -1$$

$$3x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$3x = \pi + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$$

$$X = 2/3 \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$X = \pi/3 + 2/3 \pi m, m \in \mathbb{Z}$$

Второй этап. Из полученной совокупности решений отберем те конкретные решения, которые принадлежат интервалу $(-\pi; 3/2\pi)$. Для этого решим в целых числах два двойных строгих неравенства относительно параметров m и n .

$$\text{Первое неравенство: } -\pi < 2/3 \pi n < 3/2 \pi$$

$$-1 < 2/3 n < 3/2$$

$$-1 \frac{1}{2} < n < 2 \frac{1}{4}$$

Так как $n \in \mathbb{Z}$, то $n = -1; 0; 1; 2$

$$\text{при } n = -1$$

$$x_1 = -2/3 \pi$$

$$\text{при } n = 0$$

$$x_2 = 0$$

$$\text{при } n = 1$$

$$x_3 = 2/3 \pi$$

$$\text{при } n = 2$$

$$x_4 = 4/3 \pi$$

$$\text{Второе неравенство: } -\pi < \pi/3 + 2/3 \pi m < 3/2 \pi$$

$$-1 < 1/3 + 2/3 m < 3/2$$

$$-4/3 < 2/3 m < 7/6$$

$$-2 < m < 1 \frac{3}{4}$$

Так как $m \in \mathbb{Z}$, то $m = -1; 0; 1$

$$\text{при } m = -1$$

$$x_5 = -\pi/3$$

$$\text{при } m = 0$$

$$x_6 = \pi/3$$

$$\text{при } m = 1$$

$$x_7 = \pi$$

Возможно и другое решение этого уравнения.

Первый этап. Воспользуемся формулой понижения степени косинуса

$$\cos^2 \alpha/2 = \frac{1 + \cos \alpha}{2} \quad \text{получим уравнение} \quad \frac{1 + \cos 6x}{2} = 1$$

Отсюда $1 + \cos 6x = 2$, $\cos 6x = 1$, $6x = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, $x = \pi/3 k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Множество чисел $x = \pi/3 k$ и совокупность множеств $x = 2/3 \pi n$ и $x = \pi/3 + 2/3 \pi m$ отличаются по форме, но фактически совпадают. Действительно, при $k = 2n$ (четных) из решений $x = \pi/3 k$ получаем решения $x = 2/3 \pi n$, а при $k = 2m + 1$ (нечётных) получаем решения $x = \pi/3 + 2/3 \pi m$.

Второй этап. Решим строгое двойное неравенства в целых числах относительно k

$$-\pi < \pi/3 k < 3/2\pi$$

$$-1 < 1/3 k < 3/2$$

$$-3 < k < 4,5$$

Так как $k \in \mathbb{Z}$, то $k = -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4$.

$$\text{При } n = -2 \quad x_1 = -2/3 \pi$$

$$\text{При } n = -1 \quad x_2 = -\pi/3$$

$$\text{При } n = 0 \quad x_3 = 0$$

$$\text{При } n = 1 \quad x_4 = \pi/3$$

$$\text{При } n = 2 \quad x_5 = 2/3 \pi$$

$$\text{При } n = 3 \quad x_6 = \pi$$

$$\text{При } n = 4 \quad x_7 = 4/3 \pi$$

Ответ. $x_1 = -2/3 \pi$; $x_2 = -\pi/3$; $x_3 = 0$; $x_4 = \pi/3$; $x_5 = 2/3 \pi$; $x_6 = \pi$; $x_7 = 4/3 \pi$

Пример 1.8. Решить уравнение $\cos(\pi/2 + x^2) = 0$

Решение. Применим формулу приведения (кстати, это первое, что всегда полезно сделать)

$$-\sin x^2 = 0, \text{ тогда } \sin x^2 = 0$$

$x^2 = \pi n$, где $n \in \mathbb{N}_0$, так как x^2 - есть неотрицательное число при всех действительных x .

\mathbb{N}_0 - расширенное множество натуральных чисел ($\mathbb{N}_0 \equiv \mathbb{N} \cup \{0\}$)

$$\text{Откуда } x = \pm \sqrt{\pi n}, \text{ где } n \in \mathbb{N}_0$$

$$\text{Ответ. } x = \pm \sqrt{\pi n}, \text{ где } n \in \mathbb{N}_0$$

Пример 1.9. Найти все решения уравнения $\sin(\pi/2 + x^2) = -1$, удовлетворяющее неравенству $|x + 1| < 3$

Решение.

Первый этап. Решим уравнение $\sin(\pi/2 + x^2) = -1$

$$\cos x^2 = -1$$

$$X^2 = \pi + 2\pi n, \text{ где } n \in \mathbb{N}_0$$

$$X = \pm \sqrt{\pi + 2\pi n}, \text{ где } n \in \mathbb{N}_0$$

II этап. Решим неравенство $|x+1| < 3$

$$\begin{aligned} -3 < x+1 < 3 \\ -4 < x < 2 \end{aligned}$$

III этап. Из найденного множества решений уравнений выберем решения, принадлежащие интервалу $(-4; 2)$

при $n=0$ $X_{12} = \pm \sqrt{\pi} \in (-4; 2)$

при $n=1$ $X_3 = -\sqrt{3\pi} \in (-4; 2)$

$$X_4 = \sqrt{3\pi} \notin (-4; 2)$$

при $n=2$ $X_5 = -\sqrt{5\pi} \in (-4; 2)$

при $n=3$ $X_6 = -\sqrt{7\pi} \notin (-4; 2)$

Ответ. $X_{12} = \pm \sqrt{\pi}; X_3 = -\sqrt{3\pi}; X_4 = -\sqrt{5\pi};$

Пример. 1.10. Решить уравнение $\cos(\sin X) = 1$

Решение. Легкомысленный читатель быстро получит ответ, воспользовавшись дважды формулами решения простейшего тригонометрического уравнения: сначала для косинуса, а затем для синуса и получит такой ответ:

$$\sin X = 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$X = (-1)^n \arcsin 2\pi k + \pi n, \quad k, n \in \mathbb{Z}$$

Данное решение и полученный ответ неверны, так как не учтено в записи уравнения

$\sin X = 2\pi k$, что синус - ограниченная функция и не может принимать значения, по модулю большее единицы, а выражение $2\pi k$ не превосходит по модулю единицы только при $k = 0$. Следовательно, уравнение $\sin X = 2\pi k$ можно рассматривать только при $k = 0$, т.е. $\sin X = 0$, тогда $X = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$

Ответ. $X = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$

Пример. 1.11. Найти все решения уравнения $(\operatorname{ctg} X + 1)(\operatorname{tg} X - 2) = 0$ из отрезка $[-\pi; \pi]$

Решение. О.Д.З.Н. $X \neq \pi/2, \quad n \in \mathbb{Z}$

Данное уравнение на области допустимых значений равносильно совокупности двух уравнений $\operatorname{ctg} X + 1 = 0$ или $\operatorname{tg} X - 2 = 0$

$$\operatorname{ctg} X = -1 \quad \operatorname{tg} X = 2$$

$$X = -\pi/4 + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \quad X = \operatorname{arctg} 2 + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Из полученной совокупности двух множеств выберем те решения, которые расположены на отрезке $[-\pi; \pi]$

По условию
$$\begin{aligned} -\pi &\leq -\pi/4 + \pi n \leq \pi \\ -1 &\leq -1/4 + n \leq 1 \\ -3/4 &\leq n \leq 1 1/4 \end{aligned}$$

Так как $n \in \mathbb{Z}$, то $n = 0; 1$

при $n = 0$ $X_1 = -\pi/4$

при $n = 1$ $X_2 = 3/4 \pi$

Рассмотрим второе множество $X = \operatorname{arctg} 2 + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$

Отбор нужных корней из этого множества можно сделать двумя способами: с помощью единичной окружности или аналитически.

Аналитически: по определению арктангенса числа при $X = 0$ $0 < \operatorname{arctg} 2 < \pi/2$, следовательно $X_3 = \operatorname{arctg} 2 \in [-\pi; \pi]$

при $k = 1$ $\pi < \operatorname{arctg} 2 + \pi < 3/2\pi$, следовательно,

$$X = \operatorname{arctg} 2 + \pi \notin [-\pi; \pi]$$

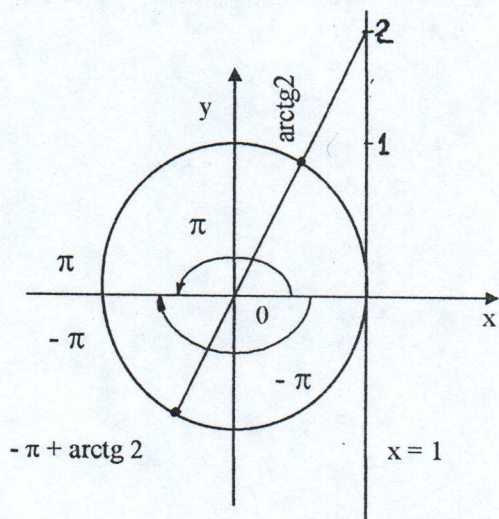
при $k = -1$ $-\pi < \operatorname{arctg} 2 - \pi < -\pi/2$, следовательно,

$$X_4 = \operatorname{arctg} 2 - \pi \in [-\pi; \pi]$$

при $k = -2$ $-2\pi < \operatorname{arctg} 2 - 2\pi < -3/2\pi$, следовательно,

$$X = \operatorname{arctg} 2 - 2\pi \notin [-\pi; \pi]$$

С помощью единичной окружности:



Из рисунка видно, что отрезку $[-\pi; \pi]$

принадлежат только два числа

$$X = \operatorname{arctg} 2 \quad \text{и} \quad X = -\pi + \operatorname{arctg} 2$$

Ответ. $X_1 = -3/4 \pi$; $X_2 = -\pi + \operatorname{arctg} 2$

$$X_3 = \pi/4$$
; $X_4 = \operatorname{arctg} 2$.

Пример.1.12. Решить уравнение $(x-2)^2 |\cos x| = \cos x$

Решение. Из уравнения следует, что $\cos x \geq 0$, следовательно, раскрыв модуль, получим

$$(x-2)^2 \cos x - \cos x = 0$$

$$\cos x (x^2 - 4x + 3) = 0$$

$$\cos x = 0 \quad (x^2 - 4x + 3) = 0$$

$$X = \pi/2 + \pi n, n \in \mathbb{Z} \quad X_1 = 1, X_2 = 3$$

Остается проверить, что при x_1 и x_2 выполняется условие $\cos x \geq 0$

При $X = 1$ $\cos 1 > 0$, т.к. $0 < 1 < \pi/2$

При $X = 3$ $\cos 3 < 0$, т.к. $\pi/2 < 3 < \pi$

Ответ. $X = 1$, $X = \pi/2 + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Пример 1.13. Найти сумму всех корней уравнения $(\operatorname{tg} x - 1) \sin 2x = 0$ из отрезка $[-4\pi; 50\pi]$

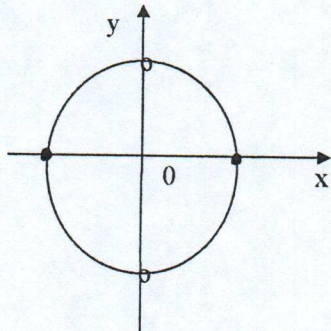
Решение. О.Д.З.Н. $X \neq \pi/2 + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$

Первый этап. Решим данное уравнение заменив равносильной совокупностью уравнений на

$$\text{О.Д.З.Н. } \operatorname{tg} X = 1 \quad \text{или} \quad \sin 2X = 0$$

$$X = \pi/4 + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \quad 2x = \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$X = \pi/2k, \quad k \in \mathbb{Z}$$



Из множества $X = \pi/2k, \quad k \in \mathbb{Z}$ следует исключить числа вида $X = \pi/2 + \pi k$, не входящие в О.Д.З.Н. На рисунке точки единичной окружности, соответствующие этим числам изображены «выколотыми» точками.

Следовательно, остаются только числа $X = \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$

Таким образом, на втором этапе нам следует найти сумму всех корней их множеств

$X = \pi/4 + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$ и $X = \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$, лежащих на отрезке $[-4\pi; 50\pi]$.

Воспользуемся следующим фактом, что корни всякого тригонометрического уравнения, выписанные по порядку в виде числовой последовательности представляют собой арифметическую прогрессию.

Второй этап.

Рассмотрим первое множество $X = \pi/4 + \pi n$. Определим число корней на заданном отрезке из этого множества, решив двойное неравенство

$$-4\pi \leq \pi/4 + \pi n \leq 50\pi$$

$$-4 \leq 1/4 + n \leq 50$$

$$-4 \frac{1}{4} \leq n \leq 49 \frac{3}{4}$$

$$\text{Т.к. } n \in \mathbb{Z}, \quad \text{то } n = -4; -3; \dots; 49$$

Отсюда заключаем, что на отрезке $[-4\pi; 50\pi]$ содержится 54 корня (4 корня, соответствующие четырем целым отрицательным значениям n ; один корень, соответствующий $n = 0$ и 49 корней, соответствующих целым положительным значениям n).

Найдем первый и последний корни этого множества.

$$\text{При } n = -4 \quad X_1 = \pi/4 - 4\pi = -15/4 \pi$$

$$\text{при } n = 49 \quad X_{54} = \pi/4 + 49\pi = 197/4 \pi$$

По формуле суммы n -первых членов арифметической прогрессии

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

Найдем сумму всех корней первого множества

$$S_{54} = \frac{x_1 + x_{54}}{2} \cdot 54 = \frac{-15/4 \pi + 197/4 \pi}{2} \cdot 54 = \frac{182}{4} \cdot 27 = 45,5\pi \cdot 27 = 1228,5 \pi$$

Рассмотрим второе множество $X = \pi k$ и поступим с ним аналогично

$$-4\pi \leq \pi k \leq 50\pi$$

$$-4 \leq k \leq 50$$

Число корней равно 55 при $n = -4 \quad X_1 = -4\pi$

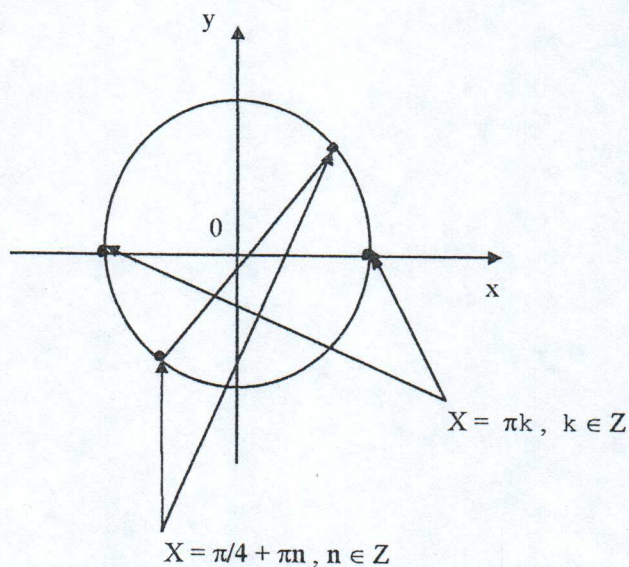
$$\text{при } n = 50 \quad X_{55} = 50\pi$$

$$\text{Тогда } S_{55} = \frac{-4\pi + 50\pi}{2} \cdot 55 = \frac{46\pi}{2} \cdot 55 = 23\pi \cdot 55 = 1265\pi$$

Общая сумма всех корней равна $S = S_{54} + S_{55} = 2493,5\pi$

Ответ. $2493,5\pi$

Замечание. При решении подобных задач следует помнить, что различные множества не должны на заданном промежутке иметь одинаковые корни. В противном случае в искомую сумму совпадающие корни войдут дважды или даже больше, в результате чего найденная сумма окажется неверной. В нашем случае множества $X = \pi/4 + \pi n$ и $X = \pi k$ совпадающих корней не имеют. (см. рис.)



Пример 1.14. Решить уравнение $(\cos x - 1)\sqrt{x+4} = 0$

Решение. Данное уравнение равносильно совокупности

$$\begin{cases} x+4 \geq 0 \\ \cos x - 1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x+4 = 0 \\ x = -4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos x = 1 \\ x \geq -4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -4 \\ x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x = 2\pi n, n \in \mathbb{N}_0$$

Ответ. $X = -4; x = 2\pi n, n \in \mathbb{N}_0$

Упражнения для самостоятельного решения.

- 1.1. Найти все корни уравнения $\operatorname{tg} 3x = 1999$, принадлежащие отрезку $[0; \pi/2]$
- 1.2. Решить уравнение $\sin \frac{1}{2}(\pi - x) = \pi/3$
- 1.3. Решить уравнение $\sin(\sin x) = 1$
- 1.4. Найти наибольший отрицательный и наименьший положительный корни уравнения $\cos \pi/6 \cdot \cos x - \sin \pi/6 \cdot \sin x = \pi/6$
- 1.5. Найти корни уравнения $\sqrt{1 - \cos x} = \sin x$, удовлетворяющие неравенству $\pi \leq x \leq 3\pi$
- 1.6. Найти все решения уравнения $\sin 2(\pi/4 + x) \cdot \cos(\pi - 2x) + 1/4 = 0$, для которых $\sin x < 0$
- 1.7. Решить уравнение $\cos(1,5\pi + x) = \sqrt{2} \sin(x + \pi) \cdot \cos x$ и указать наибольший отрицательный и наименьший положительный корни.
- 1.8. Решить уравнение $\sin x^2 = 0$
- 1.9. Решить уравнение $\sin(2 \sin 2x) = 1$
- 1.10. Решить уравнение $\sin(\pi(x - 2)) = 0$, если $x \in (0; 4)$
- 1.11. Решить уравнение $\sin x \sqrt{\cos x} = 0$
- 1.12. Решить уравнение а) $\operatorname{tg} x^2 = 1$ б) $\operatorname{tg} x^2 = -1$
- 1.13. Решить уравнение $\frac{\sin x}{1 - \cos x} = 0$
- 1.14. Имеет ли корни уравнение $\frac{1 - \cos x}{\operatorname{tg} x} = 0$?
- 1.15. Решить уравнение $\sin 2x \cdot \operatorname{tg} x + \sin 2x = 0$ и найти сумму его корней на отрезке $[-2\pi; \pi]$
- 1.16. Решить уравнение $\sin x \cdot \sqrt{x - 1} = 0$
- 1.17. Найти сумму всех корней уравнения $\cos^2 x = \sin^2 x$ на промежутке $[-10\pi; 30\pi]$
- 1.18. Найти все значения параметра «а», для которых уравнение $(a + 3) \cdot |\sin x| = a^2 - a$ имеет решения.

Ответы и указания к задачам раздела 1.

1.1. $X_1 = 1/3 \operatorname{arctg} 1999$; $X_2 = 1/3 \operatorname{arctg} 1999 + \pi/3$

Указание. Воспользоваться неравенством $\frac{\pi}{3} < \operatorname{arctg} 1999 < \pi/2$

1.2. Корней нет. Указание. $\pi/3 > 1$

1.3. Корней нет. Указание. Выражение $|\pi/2 + 2\pi k| > 1$, при любых целых k .

1.4. $\max X = -\operatorname{arccos} \pi/6$

$x < 0$

$\min X = \operatorname{arccos} \pi/6 - \pi/6$

$x > 0$

1.5. $X_1 = 2\pi$; $X_2 = 5/2 \pi$. Указание. Рассмотреть равносильную систему

$\left\{ \begin{array}{l} \sin X \geq 0 \end{array} \right.$

$\left\{ \begin{array}{l} 1 - \cos X = \sin^2 X \end{array} \right.$

1.6. $X = -\pi/6 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; $X = 7/6\pi + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$; $X = -\pi/3 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$;

$X = 4/3 \pi + 2\pi t, t \in \mathbb{Z}$

1.7. $X = \pi n, n \in \mathbb{Z}$; $X = \pm 3/4\pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

$\max X = -3/4 \pi$

$\min X = 3/4 \pi$

$x < 0$

$x > 0$

1.8. $X = \pm \sqrt{\pi k}, k \in \mathbb{N}_0$

1.9. $X = (-1)^n \operatorname{arcsin} \pi/4 + \pi/2 n, n \in \mathbb{Z}$

1.10. $X_1 = 1$; $X_2 = 2$; $X_3 = 3$

1.11. $X = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; $X = \pi/2 + \pi k, k \in \mathbb{Z}$. Указание. Рассмотреть совокупность

$\left\{ \begin{array}{l} \cos X \geq 0 \end{array} \right.$

$\left\{ \begin{array}{l} \sin X = 0 \end{array} \right.$

или

$\cos X = 0$

1.12. а) $X = \pm \sqrt{\pi/4 + \pi n}, n \in \mathbb{N}_0$, б) $X = \pm \sqrt{-\pi/4 + \pi n}, n \in \mathbb{N}$. Указание. Учесть, что $X^2 \geq 0$ при всех $X \in \mathbb{R}$

1.13. $X = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$. Указание. Учесть, что $\cos X \neq 1$.

1.14. Уравнение корней не имеет.

1.15. $X = \pi n, n \in \mathbb{Z}$; $X = -\pi/4 + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; $S = -2,75\pi$

1.16. $X = 1$; $X = \pi n, n \in \mathbb{N}$.

1.17. $S_{80} = 800 \pi$. Указание. Воспользоваться формулой косинуса двойного аргумента.

1.18. $-1 \leq a \leq 0$; $1 \leq a \leq 3$. Выразить из уравнения $|\sin X|$ и учесть, что $0 \leq |\sin X| \leq 1$.

Переходим к решению более сложных тригонометрических уравнений. При решении тригонометрических уравнений следует помнить, что одно и то же уравнение может решаться несколькими способами, так что получающиеся ответы могут сильно различаться по виду и форме, но в действительности же совпадают (вспомните решение примера 1.7.).

Решая тригонометрические уравнения, желательно применять только такие преобразования, при которых область допустимых значений неизвестного (ОДЗН) либо не изменяется, либо расширяется, ибо возможное в таком случае приобретение посторонних корней является меньшим «злом» по сравнению с потерей корней. Посторонние корни легко устранить с помощью проверки. Если же при решении уравнения мы вынуждены применять такое преобразование, которое приводит к сужению области допустимых значений неизвестного, то в этом случае следует обязательно проверить, не являются ли решениями уравнения исключаемые из (ОДЗН) значения искомой переменной.

Всякое тригонометрическое уравнение, не являющееся простейшим, с помощью тождественных преобразований или с помощью специальных приемов сводится к одному или нескольким простейшим уравнениям. Переходим к рассмотрению различных видов тригонометрических уравнений и способам их решений.

Раздел 2. Тригонометрические уравнения, решаемые «пристальным взглядом» или оценочным способом.

Изучая в восьмом классе квадратные уравнения, я предлагаю решить такое уравнение

$$2x^2 + 3996x - 3998 = 0,$$

если известно, что оно имеет корни X_1 и X_2 . На первый взгляд без громоздких выкладок здесь не обойтись. Но если посмотреть на уравнение внимательно или, как говорят, пристально, то нельзя не заметить, что все коэффициенты четные, а следовательно, можно их сократить на 2.

Тогда получим уравнение $x^2 + 1998x - 1999 = 0$

Снова, пристально взглянув, теперь на последнее уравнение, замечаем, что один из корней данного уравнения равен 1, т.е. $X_1 = 1$

Тогда, по теореме Виета $X_1 \cdot X_2 = 1 \cdot X_2 = -1999$, откуда $X_2 = -1999$

Итак, мы решили заданное уравнение методом «пристального взгляда». Этот метод можно использовать при решении некоторых тригонометрических уравнений.

В силу того, что тригонометрические функции *синус* и *косинус* ограниченные и их значения по модулю не превосходят единицы, можно сказать: имеет данное тригонометрическое уравнение решения или не имеет. Для этого нужно в уравнении оценить его левую и правую части и из этой оценки сделать вывод. Тем более, что это бывает либо гораздо проще сделать, чем решить уравнение, либо единственно возможно.

Полезно также знать, что $-\sqrt{2} \leq \sin X \pm \cos X \leq \sqrt{2}$ при любых X .

Действительно, рассмотрим сумму $\sin X + \cos X = \sin X + \sin\left(\frac{\pi}{2} - X\right) = 2 \sin \frac{\pi}{4} \cdot \cos X =$

$$2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cos X = \sqrt{2} \cos X. \text{ Так как } -1 \leq \cos X \leq 1, \text{ то } -\sqrt{2} \leq \sqrt{2} \cos X \leq \sqrt{2} \text{ и,}$$

следовательно, $-\sqrt{2} \leq \sin X + \cos X \leq \sqrt{2}$.

Аналогично доказывается, что $-\sqrt{2} \leq \sin X - \cos X \leq \sqrt{2}$ (проведите доказательство самостоятельно).

При решении уравнений данного вида часто используют неравенство $a + \frac{1}{a} \geq 2$ при $a > 0$, которое называется неравенством Коши.

Действительно, $a + \frac{1}{a} - 2 \geq 0$, $\frac{a^2 - 2a + 1}{a} \geq 0$, $\frac{(a - 1)^2}{a} \geq 0$ - верно при $a > 0$.

Знак равенства достигается при $a = 1$.

Отсюда заключаем, что $|a + \frac{1}{a}| \geq 2$ при любых $a \neq 0$.

Пример 2.1.

Объяснить, почему следующие уравнения не имеют решения:

1. $\sin^2 X - \sin 3X - 3 = 0$
2. $2\sin X + 2\cos X - 3 = 0$
3. $\sin 7X + \cos 15X + \sin 19X = 3,5$
4. $\operatorname{tg} X + \operatorname{ctg} X = 1$

Воспользуемся методом «пристального взгляда».

Решение. 1. Запишем уравнение так $\sin^2 X = \sin 3X + 3$.
Оценим каждую часть уравнения.

$$\begin{aligned} \text{Левая часть} \quad 0 \leq \sin^2 X \leq 1 \\ \text{Правая часть} \quad 2 \leq \sin 3X + 3 \leq 4 \end{aligned}$$

Видим, что ни при каких значениях X значение левой части уравнения не может совпасть со значением правой его части. Следовательно, уравнение не имеет решений.

2. Приведем уравнение к виду $\sin X + \cos X = \frac{3}{2}$,

из которого видно, что оно не имеет решений т.к. $|\sin X + \cos X| \leq \sqrt{2} < \frac{3}{2}$.

3. Т.к. $|\sin 7X| \leq 1$, $|\cos 15X| \leq 1$, $|\sin 19X| \leq 1$,
то левая часть уравнения не может превышать 3.

4. Запишем уравнение в виде $\operatorname{tg} X + \frac{1}{\operatorname{tg} X} = 1$.

Тогда в силу неравенства Коши $|\operatorname{tg} X + \frac{1}{\operatorname{tg} X}| \geq 2$.

Пример.2.2.

Решить уравнение $\sin^4 x - \sin^2 3x + \sin x - 3 = 0$

Решение. Перепишет уравнение так: $\sin^4 x - 3 = \sin^2 3x - \sin x$

Учитывая ограниченность синуса и свойства числовых неравенств, оценим обе части последнего уравнения.

Левая часть: $0 \leq \sin^4 x \leq 1$, отсюда получаем, что
 $-3 \leq \sin^4 x - 3 \leq -2$

Правая часть: $0 \leq \sin^2 3x \leq 1$
+
 $\frac{-1 \leq -\sin x \leq 1}{-1 \leq \sin^2 3x - \sin x \leq 2}$

Отсюда заключаем, что уравнение решений не имеет.

Ответ. Решений нет.

Пример.2.3. Решить уравнение $2\sin x = 5x^2 + 2x + 3$

Решение. Оценим каждую часть уравнения.

Левая часть: $-2 \leq 2 \sin x \leq 2$

Правая часть: Выделим полный квадрат

$$5(x^2 + 2 \cdot x \cdot 1/5 + 1/25) + 2 \cdot 4/5 = 5(x + 1/5)^2 + 2 \cdot 4/5 > 2$$

Следовательно, при любых x левая часть не равна правой, а значит, уравнение не имеет корней.

Замечание. Убедиться в отсутствии корней у данного уравнения можно графически. Это мы рассмотрим в одном из последующих разделов.

Ответ. Решений нет.

Пример.2.4. Решить уравнение $3\sin x - \frac{\pi^2}{4} = x^2 - \pi x + 3$ (1)

Решение. В левой части уравнения уединим синус

$$3 \sin x = x^2 - \pi x + \frac{\pi^2}{4} + 3 \quad (2)$$

Методом « пристального взгляда » замечаем, что $x = \pi/2$ является корнем данного уравнения (1).

$$\text{Действительно, } 3 \sin \pi/2 = \pi^2/4 - \pi^2/2 + \pi^2/4 + 3 \\ 3 = 3 - \text{верное равенство.}$$

Покажем, что этот корень единственный. Для этого оценим левую и правую часть уравнения (2).

Левая часть: $-3 \leq 3 \sin x \leq 3$

$$\text{Правая часть: } x^2 - \pi x + \frac{\pi^2}{4} + 3 = (x - \pi/2)^2 + 3 \geq 3$$

Следовательно, левая и правая части могут одновременно принимать только одно значение, равное 3. Нетрудно заметить, что значение, равное 3, правая часть принимает только при $x = \pi/2$. При $x = \pi/2$ левая часть также равна 3. Таким образом уравнение имеет единственный корень $x = \pi/2$.

Ответ. $x = \pi/2$.

Упражнения для самостоятельного решения.

- 2.1. Объяснить, почему уравнение не имеет решений. $\sin^4 X + \cos^4 X = 5/4$
- 2.2. Решить уравнение $\sin 2x = 1/x + x$
- 2.3. Решить уравнение $\sin^2 2x + \sin^2 x = 0$
- 2.4. Решить уравнение $\sin 3x + \cos 2x + 2 = 0$
- 2.5. Определить, при каких «а» уравнение $(a - 2) \sin^2 x = 1$ имеет решения.

Ответы и указания к задачам раздела 2.

- 2.1. Указание. Воспользоваться одним из тождеств.
 $\sin^4 X + \cos^4 X = 1 - 1/2 \sin^2 2x$ или $\sin^4 X + \cos^4 X = 3/4 + 1/4 \cos 4x$
- 2.2. Решений нет. Указание. Применить неравенство Коши $|1/x + x| \geq 2$
- 2.3. $X = \pi n, n \in \mathbb{Z}$. Указание. Рассмотреть систему
$$\begin{cases} \sin 2x = 0 \\ \sin x = 0 \end{cases}$$
 и найти её решения.
- 2.4. $X = \pi/2 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. Указание. Заметить, что сумма $\sin 3x + \cos 2x \geq -2$ и рассмотреть систему
$$\begin{cases} \cos 2x = -1 \\ \sin 3x = -1 \end{cases}$$
- 2.5. $a \geq 3$. Указание. Выразить $\sin^2 x$ и учесть, что $0 \leq \sin^2 x \leq 1$.

Раздел 3. Квадратные тригонометрические уравнения и уравнения,
сводящиеся к ним.

Определение. Тригонометрические уравнения вида

$$f(a \sin^2 \alpha X; b \sin \alpha X; C) = 0$$

$$f(a \cos^2 \alpha X; b \cos \alpha X; C) = 0$$

$$f(a \operatorname{tg}^2 \alpha X; b \operatorname{tg} \alpha X; C) = 0$$

$$f(a \operatorname{ctg}^2 \alpha X; b \operatorname{ctg} \alpha X; C) = 0$$

называются квадратными тригонометрическими уравнениями. Следовательно, тригонометрические уравнения считаются квадратными только относительно одной тригонометрической функции и одного аргумента. Такие уравнения с помощью замены тригонометрической функции на новую переменную сводятся к алгебраическому квадратному уравнению относительно новой переменной. При этом, если делаем замену $t = \sin \alpha X$ или $t = \cos \alpha X$, то переменная t должна удовлетворять условию $-1 \leq t \leq 1$, которое будем называть ограничением на новую переменную t .

При решении неполных квадратных тригонометрических уравнений вводить новую переменную не имеет смысла.

Покажем это на примерах.

Пример.3.1. Решить уравнение $\cos^2 X - \cos X = 0$

Решение. Вынесем за скобки $\cos X$:

$\cos X (\cos X - 1) = 0$ и рассмотрим совокупность двух уравнений

$\cos X = 0$ или $\cos X = 1$.

$$X = \pi/2 + \pi n, n \in \mathbb{Z} \quad \text{или} \quad X = 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$$

Ответ. $X = \pi/2 + \pi n, n \in \mathbb{Z}; X = 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$

Пример.3.2. Решить уравнение $\sin^2 X = 1/4$

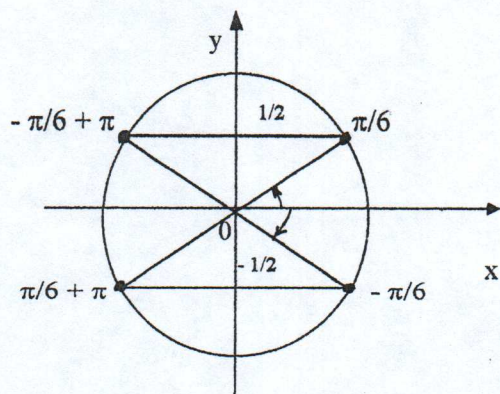
Решение. Возможны два способа решения.

Первый способ. Исходное уравнение равносильно совокупности уравнений

$$\sin X = -1/2 \quad \text{или} \quad \sin X = +1/2$$

$$X = (-1)^{k+1} \pi/6 + \pi k, k \in \mathbb{Z} \quad X = (-1)^m \pi/6 + \pi m, m \in \mathbb{Z}$$

Полученные два множества легко объединить в одно, если не поленишься. Отметить на единичной окружности значения синуса равные $-1/2$ и $1/2$ (см. рис.)



$$X = \pm \pi/6 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Второй способ. С практической точки зрения более удобным способом является решение, основанное на применении формулы понижения степени

$$2\sin^2 \alpha = 1 - \cos 2\alpha$$

В данном уравнении обе части умножим на 2 и применим указанную формулу

$$2\sin^2 x = 1/2, \quad 1 - \cos 2x = 1/2, \quad \cos 2x = 1/2$$

$$2x = \pm \arccos 1/2 + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$2x = \pm \pi/3 + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \pm \pi/6 + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Ответ. $X = \pm \pi/6 + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$

Пример.3.3. Решить уравнение $2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$

Решение. Данное уравнение является квадратным относительно синуса. Сделав замену $\sin x = t$, где $-1 \leq t \leq 1$, приходим к квадратному уравнению относительно

новой переменной $2t^2 + 3t - 2 = 0$,

корни которого $t_1 = 1/2$

$t_2 = -2$ (не удовлетворяет ограничению на t)

Следовательно, исходное уравнение равносильно уравнению

$$\sin x = 1/2, \text{ откуда находим}$$

$$X = (-1)^n \pi/6 + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Ответ. $X = (-1)^n \pi/6 + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$

Пример.3.4. Решить уравнение $\cos^2 x/3 - 7\sin(\pi/2 + x/3) + 4 = \sin^2 x/3$

Решение. Данное уравнение пока не является квадратным, но оно легко сводится к квадратному относительно $\cos x/2$

Применив формулу приведения и основное тригонометрическое тождество, получим уравнение

$$\cos^2 x/3 - 7 \cos x/3 + 4 = 1 - \cos^2 x/3$$

$$2 \cos^2 x/3 - 7 \cos x/3 + 3 = 0$$

Пусть $\cos x/3 = t$, где $-1 \leq t \leq 1$, тогда относительно t приходим к уравнению

$$2t^2 - 7t + 3 = 0$$

Решив его, получим $t_1 = 1/2$; $t_2 = 3$ (не удовлетворяет ограничению на t).

Следовательно $\cos x/3 = 1/2$

$$x/3 = \pm \pi/3 + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \pm \pi + 6\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Ответ. $X = \pm \pi + 6\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$

Пример.3.5. Найти все корни уравнения $2 \sin 2x + \cos 4x + 3 = 0$, удовлетворяющие неравенству $-1 < x < 4$.

Решение. Сначала найдем все корни данного уравнения. Приведем данное уравнение снова к квадратному, применив формулу косинуса двойного аргумента

$$2 \sin^2 x + 1 - 2 \sin^2 2x + 3 = 0,$$

$$2 \sin^2 2x - 2 \sin 2x - 4 = 0.$$

Пусть $\sin 2x = t$, $-1 \leq t \leq 1$, тогда приходим к уравнению

$$2t^2 - 2t - 4 = 0,$$

$$t^2 - t - 2 = 0,$$

$$t_1 = -1,$$

$$t_2 = 2, \quad (\text{не удовлетворяет ограничению}).$$

Рассмотрим теперь уравнение

$$\sin 2x = -1, \text{ откуда находим}$$

$$2x = -\pi/2 + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$x = -\pi/4 + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Из найденного множества выберем те корни, которые принадлежат интервалу $(-1; 4)$

$$\text{при } n = 0 \quad x_1 = -\pi/4 \in (-1; 4)$$

$$\text{при } n = 1 \quad x_2 = 3/4 \pi \in (-1; 4)$$

Ответ. $x_1 = -\pi/4$; $x_2 = 3/4 \pi$

Рассматривая уравнения данного вида, следует иметь в виду, что если уравнение содержит синус и косинус одного аргумента и синус входит в это уравнение только в четных степенях, то заменяя в этом уравнении $\sin^2 x$ на $1 - \cos^2 x$, получим алгебраическое уравнение относительно $\cos x$. Точно так же, если $\cos x$ входит в уравнение лишь в четной степени, то заменой $\cos^2 x$ на $1 - \sin^2 x$, получим алгебраическое уравнение относительно $\sin x$.

Пример.3.6. Решить уравнение $\cos^4 x + 3 \sin x - \sin^4 x = 2$

Решение. Т.к. $\cos x$ содержится только в четной степени, то заменим $\cos^2 x$ на $1 - \sin^2 x$, т.е. $\cos^4 x$ на $(1 - \sin^2 x)^2$. Тогда уравнение примет вид

$$(1 - \sin^2 x)^2 + 3 \sin x - \sin^4 x - 2 = 0$$

Сделаем замену $\sin x = t$, $-1 \leq t \leq 1$. Получим алгебраическое уравнение относительно новой переменной t : $(1 - t)^2 + 3t - t^4 - 2 = 0$, откуда

$$2t^2 - 3t + 1 = 0. \text{ Решив последнее уравнение, получим } t_1 = 1/2, \quad t_2 = 1.$$

Решим совокупность уравнений $\sin x = 1/2$, $\sin x = 1$, откуда получаем

$$x = \pi/2 + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$x = (-1)^k \pi/6 + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ. $x = \pi/2 + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$; $x = (-1)^k \pi/6 + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$

Упражнения для самостоятельного решения.

3.1. Найти все решения уравнения

$$4\sin^2 x = 4 \sin x + \cos^2 x, \text{ для которых } \cos x \leq 0.$$

3.2. Найти нули функции

$$y = \operatorname{tg} 2x + 2 \operatorname{ctg} 2x - 3.$$

3.3. Решить уравнение

$$\operatorname{ctg}^2 x \cdot \cos^2 x = 4 \cos 2x \text{ и найти все его корни из отрезка } [-\pi/2; \pi/2]$$

3.4. Решить уравнение

$$\frac{2 - \sin x + \cos 2x}{6x^2 - \pi x - \pi^2} = 0$$

3.5. Решить уравнение

$$4\sin^4 x - 2\sin^2 x \cdot \cos x + 4 \cos 2x = 2 \cos^3 x - \sin^2 2x + 2.$$

3.6. Решить уравнение

$$(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x - \sin 2x + 1/2 = 0.$$

3.7. Найти абсциссы тех точек графика функции $y = \sin^2 x - \cos^2 x$, ординаты которых равны $1/2$.

3.8. Решить уравнение

$$\frac{\sin^2 x + \sin x - 5}{\sin x} + \frac{3 \sin x}{\sin^2 x + \sin x - 5} + 4 = 0$$

3.9. Решить уравнение

$$(3 - \operatorname{tg} x)(4 - \operatorname{tg} x)(7 - \operatorname{tg} x)(8 - \operatorname{tg} x) = 60.$$

3.10. Решить уравнение

$$\sin^4 x/3 + \cos^4 x/3 = 5/8.$$

3.11. Найти все значения параметра «a», при которых уравнение $\cos^2 2x (1 - a) = 1$ имеет решения.

Ответы и указания к задачам раздела 3.

3.1. $x = \pi/2 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \quad x = \arcsin 1/5 + \pi(2k + 1), k \in \mathbb{Z}.$

3.2. $x = \pi/4 + \pi n, n \in \mathbb{Z}; \quad x = \operatorname{arctg} 2 + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$ Указание. Решить уравнение $y = 0$.

3.3. $x = \pm 1/2 \arccos 1/3 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$
 $x_1 = 1/2 \arccos 1/3; \quad x_2 = -1/2 \arccos 1/3.$

Указание. Применить формулы половинного аргумента для котангенса и косинуса и свести уравнение к квадратному $9y^2 - 6y + 1 = 0$.

3.4. $X = \pi/2 + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, но $n \neq 0$. Указание. О.Д.З.Н. $X \neq -\pi/3$; $X \neq \pi/2$. Числитель свести к квадратному уравнению через новую переменную $2y^2 + y - 3 = 0$. Для получения окончательного ответа учесть О.Д.З.Н.

3.5. $X = 2/3\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Указание. Привести уравнение к виду $2 \cos 2x - \cos x - 1 = 0$.

3.6. $X = \pi/4 + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Указание. Привести уравнение к виду $\sin^2 2x + 2 \sin 2x - 3 = 0$.

3.7. $X = \pm \pi/3 + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Указание. Решить уравнение $\sin^2 x - \cos^2 x = 1/2$.

3.8. $X = \pi/2 + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Указание. Обозначить

$$\frac{\sin^2 x + \sin x - 5}{\sin x} = t$$

3.9. $X = \arctg 2 + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ $X = \arctg 9 + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Перемножить крайние и средние скобки и ввести обозначение.

3.10. $X = \pi/2 + 3\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $X = \pm \pi + 3\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Указание. Заменить либо $\sin^2 x/3$ на $1 - \cos^2 x/3$, либо $\cos^2 x/3$ на $1 - \sin^2 x/3$.

3.11. $a \leq 0$.